Ottobre 2013.
P. Manara. Propongo reimpaginato e da me riordinato il materiale di lavoro (dell'anno 1989), rimasto incompleto, preparato da *Carlo Felice Manara* e *Gabriele Lucchini*, destinato ad un articolo a due autori dal titolo *Ottimizzazione: dimensioni storico-culturali e matematiche*, dedicato alla rivista Nuova Secondaria. L'articolo non fu pubblicato, ma il progetto era già ampiamente elaborato. Il materiale doveva essere suddiviso in tre parti e alcune "*Schede*" di lavoro, destinate a essere distribuite dal Docente agli allievi in classe. Le *Schede* avrebbero dovuto essere coordinate con la seconda parte di tipo "elementare", a cura di G. Lucchini.

Indice.

30.11.1989

MATERIALI IN INSERTO

L'ottimizzazione:

dimensioni storico-culturali e matematiche

Carlo Felice Manara e *Gabriele Lucchini*

1. L'aspirazione al *"raggiungimento del migliore risultato possibile nelle condizioni date o in relazione a un determinato fine"* (vedere Scheda N. 1) è senz'altro antica, non solo a livello istintivo o intuitivo, ma anche e soprattutto dal punto di vista razionale delle ricerche matematiche, a volte suggerite - come in parte vedremo- da altre discipline. Si possono ricordare, ad esempio, la forma delle celle delle api (vedere Scheda N. 12), il noto passo dell'*Eneide* relativo alla fondazione di Cartagine (vedere Scheda N. 2), i risultati di ZENODORO (forse fine del II secolo a.C.) su problemi di *isoperimetria* (vedere Scheda N. 3) e, più in generale, gli studi su p*roblemi di massimo o minimo* (vedere Scheda N. 4), che in particolare hanno portato - in epoca rinascimentale specialmente con GOTTFRIED WILHELM von LEIBNIZ (1646-1716) - ad alcuni capitoli del *Calcolo infinitesimale* nati proprio da ricerche relative a problemi di massimo o minimo di certe funzioni.[1] Nonostante questo il termine OTTIMIZZAZIONE, come è ben noto, è stato accolto solo recentemente nei dizionari [ad esempio nel *Dizionario Enciclopedico Italiano* compare con il supplemento del 1974 (vedere Scheda N. l)], forse perché è solo da pochi lustri che i problemi di ottimizzazione sono stati affrontati nella loro generalità e sono stati presi come oggetto di studi specifici di ricerca di procedure di risoluzione [ricordiamo, ad esempio, *il principio di ottimalità* di RICHARD BELLMAN (Vedere Scheda N. 9), *la programmazione lineare* (vedere Schede N. 5, N. 6)], anche per possibilità offerte dagli elaboratori elettronici per l'utilizzazione di risultati matematici, talvolta noti da tempo ma non facilmente impiegabili operativamente. [2]

2. Come si è accennato le ricerche matematiche che possono essere dette di ottimizzazione hanno origini antiche e si sono susseguite nei tempo: la Matematica è stata ed è non solo uno strumento per conoscere a fondo la natura [nel senso evidenziato dal noto passo di GALILEO GALILEI (1564-1642) riportato nella Scheda 10], ma anche uno strumento per guidare razionalmente il comportamento umano, in vista di determinati obiettivi e quindi in particolare per la ricerca di situazioni ottimali.

Questo concetto e questo modo di vedere le cose si sono fatti molto più chiari e si sono estesi in tempi moderni, ma questo non deve far dimenticare che già in epoca classica erano state trovate soluzioni molto ingegnose che ancora oggi sono interessanti come stimolo all'immaginazione e come dimostrazione del fatto che non occorre utilizzare i metodi dell'*Analisi matematica* o gli *elaboratori elettronici* per risolvere tanti problemi, che si chiariscono con un minimo di inventiva e di accurata riflessione. Con questo, ovviamente, non si vuole sminuire l'importanza di certi metodi e di certi strumenti: interessa qui cominciare a richiamare la questione, sulla quale torneremo, della scelta e del "costo" di metodi e strumenti diversi da procedure standardizzate applicate meccanicamente. [3]

3. La ricerca di un massimo o di un minimo - e, in generale, di una situazione ottimale - può essere dettata da diverse esigenze e dipendere dalla scelta dell'obiettivo: una medesima funzione può quindi presentare diversi punti ottimali a seconda dell'obiettivo che si è scelto, in corrispondenza al fatto che un problema può avere soluzioni diverse in relazione ai criteri in base ai quali ci si propone di risolverlo o ai vincoli che si hanno, come ad esempio la richiesta di soluzioni intere nel problema della Scheda N. 5.

Un aspetto importante e delicato dei problemi di ottimizzazione (ma, ovviamente non solo di questi) è quello del *costo* del procedimento di risoluzione, sia per quanto riguarda l'acquisizione di metodi e di strumenti sia per quanto riguarda l'effettivo impiego di risorse e - eventualmente - di capitali, costo che potrebbe rendere addirittura non conveniente da questo punto di vista la ricerca della soluzione ottimale. Un altro aspetto importante e delicato è quello che si può chiamare della *quantificazione*, nel senso di traduzione in termini quantitativi dell'obiettivo (o degli obiettivi) e dei vincoli.

OSSERVAZIONE. Ciò che abbiamo detto or ora può far pensare che allora la teoria della ottimizzazione può dimostrare la propria utilità e la propria potenza soltanto in relazione ad argomenti che si prestino ad una quantificazione; il che darebbe ragione a chi critica l'impiego della matematica in certi campi, obbiettando che i concetti che si trattano non si prestano ad una quantificazione perché non sono delle grandezze che si prestano ad una misura nel senso classico del termine. Si risponde dicendo che i numeri sono solo alcuni degli oggetti della matematica, anche se nella mente dei più essi vengono considerati come l'oggetto esclusivo di questa scienza. In effetti invece il problema della ricerca di situazioni ottimali si presenta anche per insiemi non quantificabili nel senso elementare del termine; si può infatti concepire la ricerca di situazioni ottimali in insiemi nei quali è stabilita una relazione di ordine, anche se gli elementi dell'insieme considerato non sono numeri per i quali la relazione d'ordine viene abitualmente considerata come immediata. Un classico esempio di situazioni di questo genere è dato dal concetto di utilità (*ofelimità* per V. Pareto) in Economia: qui la costruzione dì una funzione di utilità in uno spazio vettoriale ha il solo scopo di ricondurre il confronto tra due "panieri di beni" a quello dei valori della funzione di utilità. Ma, in linea di principio, l'introduzione della funzione di ofelimità non è strettamente necessaria per la ricerca della situazione ottimale; ricerca che, se è data la funzione di utilità, viene ricondotta alla ricerca dei massimi vincolati di una certa funzione reale. Pertanto, in questo caso, si potrebbe dire che la introduzione della funzione di utilità non è strettamente necessaria, anche se permette di utilizzare i metodi classici dell'Analisi: ma non si può escludere che, con i nuovi strumenti di elaborazione dell'informazione, sia possibile ricercare le situazioni ottimati anche in condizioni molto più generali.

4 - La problematica dell'ottimizzazione ha seguito nella sua evoluzione il progresso di tutta la scienza matematica, spesso stimolando tale progresso, come ha detto Hilbert. Così si è passati dalla ricerca di

situazioni ottimali nel campo della geometria elementare, con la classica teoria degli isoperimetri, alla ricerca dei massimi e minimi di funzioni reali di una o più variabili con i primordi del Calcolo infinitesimale; negli ultimi secoli i problemi trattati sono sempre più generali, perché, con l'Analisi funzionale, il problema della ricerca delle situazioni ottimali ha avuto per oggetto addirittura delle funzioni, di una o di più variabili. Un'intera branca dell'Analisi matematica, il calcolo delle variazioni, che sfocia oggi nell'Analisi funzionale, ha avuto origine da queste problematiche.

5 - Si può osservare che le procedure spesso seguite hanno ricondotto i problemi di ottimalità che si volevano risolvere a problemi già risolti in precedenza: per esempio nei casi classici trattati dall'Analisi matematica la ricerca dei massimi o dei minimi di determinate funzioni viene ricondotta alla soluzione di determinati sistemi di equazioni, che si scrivono uguagliando a zero le derivate delle funzioni in parola. In questo ordine di idee è particolarmente brillante la considerazione del metodo dei moltiplicatori indeterminati di Lagrange per la ricerca di massimi o minimi vincolati di funzioni di più variabili. Nel caso del calcolo delle variazioni, nel quale l'oggetto ricercato è una funzione, il problema viene ricondotto, con Eulero, alla soluzione di una equazione differenziale (o di un sistema di equazioni cosiffatte). C'è da osservare che, in queste procedure di soluzione, vengono trovate soltanto delle condizioni necessarie perché gli oggetti trovati (punti o funzioni) soddisfino ai problemi posti; invero in molti casi le procedure adottate si riducono quasi sempre a delle deduzioni le quali pertanto conducono a delle condizioni necessarie che debbono essere soddisfatte; procedura questa che è già stata codificata dalla logica greca, e chiamata procedura di *analisi.* Essa si trova già presentata in Euclide, (anche se dei passi in cui è esposta è contestata l'autenticità) ed in Proclo (Consultare Heath - The thirteen books of Euclid's Elements). Si trova quindi confermata l'opinione di F. Enriques (esposta nell'articolo ANALISI dell'*Enciclopedia Treccani*) il quale spiega il nome di Analisi matematica, dato alla dottrina oggi, come tipico di una procedura deduttiva, secondo i canoni della metodologia greca. Nel caso della ricerca di massimi o minimi di una funzione, è noto che la determinazione di condizioni che siano anche sufficienti per la soluzione dei problemi posti sul tappeto, costituisce oggetto di procedure abitualmente esposte nei trattati e nei manuali; nel caso del calcolo delle variazioni, la determinazione delle condizioni sufficienti ha dato luogo a fondamentali ricerche, dovute ad alcune fra le menti matematiche più brillanti del secolo XIX (Jacobi, Weierstrass,…).

6 – L'esistenza di strumenti sempre più potenti per il calcolo e per l'elaborazione dell'informazione permette oggi di impostare e risolvere dei problemi di ottimizzazione la cui soluzione era in pratica impossibile, in un'epoca precedente, ai nostri colleghi che non avevano questi mezzi. Tali problemi, da un punto di vista concettuale, possono essere considerati come abbastanza semplici: ma , per la soluzione pratica numerica, non solo mobilitano necessariamente i mezzi materiali di cui si è detto, ma anche danno origine a ricerche teoriche molto importanti. Un esempio molto frequentemente ricordato di problemi cosiffatti è fornito dai problemi di programmazione lineare, che nascono numerosissimi nella tecnica e nella pratica delle imprese. L'occasione offerta da problemi di questo tipo, e da altri a loro connessi, permette oggi di affrontare, teoricamente ed anche praticamente, la ricerca di situazioni ottimali che non erano dominabili con i mezzi classici; invero con le procedure classiche era quasi necessario supporre valide delle ipotesi molto restrittive

sulla funzione presa in considerazione; inoltre le tecniche classiche rendevano molto difficile la ricerca di situazioni ottimali “di frontiera”: oggi invece gli strumenti concettuali e pratici permettono di ampliare di molto l’orizzonte dei problemi che si sanno trattare e risolvere.
7 – L’ampliamento di orizzonte di cui abbiamo detto poco fa è dovuto anche all’utilizzazione di nuovi concetti dovuti alle menti di alcuni fra i matematici più brillanti del ’900 (J. von Neumann e O. Morgenstern); intendiamo dire della teoria dei giochi di strategia, che ha aperto campi molto estesi alla trattazione matematica di ricerca di situazioni ottimali, traducendo in pratica ciò a cui .abbiamo accennato sopra (nel paragrafo 2), dicendo che gli oggetti della trattazione matematica non sono necessariamente sempre dei numeri. 110189

8 - Abbiamo visto che la teoria della ottimalità si è sviluppata durante la storia della matematica secondo modalità che sono state esposte sommariamente poco sopra. Va ricordato tuttavia che i concetti informatori della teoria sono stati applicati ed utilizzati anche nel campo della meccanica razionale e della fisica, portando alla formulazione di alcune leggi di queste scienze sotto forma suggestiva e sintetica; formulazione che suggerisce anche delle considerazioni non strettamente pertinenti alle scienze stesse, ma tuttavia ricche di suggestioni. Pensiamo che come primo esempio di formulazioni di questo tipo si possa ricordare la legge della rifrazione della luce, nel passaggio da un mezzo ad un altro. Invero le note leggi della rifrazione possono essere enunciate con riferimento alla differente velocità di propagazione della luce nei due mezzi; e precisamente affermando che la traiettoria percorsa dal raggio luminoso è tale da rendere minimo il tempo impiegato dalla luce nel percorrere il cammino da un punto che sta in uno dei mezzi ad un altro che sta nell'altro (vedere Scheda N. 14). È pure noto che le leggi della statica potrebbero essere enunciate, per un sistema fisico che è in un campo di forze conservativo, dicendo che la posizione di equilibrio del corpo è tale da rendere minimo il potenziale che dà origine al campo di forze. Analogamente si osserva che le celebri equazioni differenziali di Lagrange che reggono il moto di un sistema sono analoghe alle equazioni scritte da Eulero per esprimere le condizioni necessarie per la esistenza di una traiettoria ottimale di un certo funzionale. Pertanto le equazioni di Lagrange si potrebbero interpretare come quelle che forniscono le geodetiche (curve di minimo percorso) in una varietà differenziabile astratta, costruita opportunamente. Infine è appena necessario osservare che A. Einstein formulò le sue leggi del moto inerziale di un punto nel cronotopo ricorrendo alle espressioni che esprimono le proprietà delle geodetiche di una opportuna varietà di Riemann. Oltre agli esempi riportati si potrebbero ricordare i vari principi della meccanica razionale, che furono enunciati all'inizio del secolo XIX proprio sotto la forma di leggi di minimo: principio della minima azione, principio della minima costrizione dei vincoli, ecc. Queste leggi, come abbiamo detto, si sono prestate anche a fornire pretesti per considerazioni di tipo filosofico, che miravano ad estrapolare la validità delle leggi stesse in campi molto più vasti di quelli per cui erano state scritte ed in particolare volevano leggere l’esistenza di una Mente superiore, creatrice ed ordinatrice, nell’esistenza di leggi di ottimalità come quelle ricordate; non è nostra intenzione discutere qui sulla validità o meno di ragionamenti di questo tipo: ci basta aver ricordato il fatto per poterne dedurre la eleganza e la potenza unificatrice possedute da formulazioni di questo genere. Invero esse permettono di abbracciare in modo unitario molte leggi della natura, anche a chi non accetta le conseguenze di ordine teologico che se ne sono volute trarre. 110289.

Volume II. Parte II. Art . 31. E. TOGLIATTI. Massimi e minimi. Pagg. l - 72.

C) T. LEVI CIVITA e U. AMALDI . Meccanica razionale (Bologna, 1927).Volume II, Parte II. Cap. XI. Principi generali. Pagg. 482-572.

[1] Citiamo in proposito i quattro articoli seguenti:

a) da *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* raccolte e coordinate da FEDERIGO ENRIQUES - III Edizione - Parte III (pp. 99-199, pp. 201-310, pp. 311-471) - Zanichelli Bologna, 1927

- *XXV* - *Sui massimi e minimi delle funzioni algebriche elementari* di ALESSANDRO PADOA (Genova.)
- *XXVI* - *Sulla teoria elementare degli isoperimetri* di OSCAR CHISINI (Milano) (Vedere Schede N. 3, N.15)
- XXVII - *Massimi e minimi dell'analisi moderna* di FEDERIGO ENRIQUES (Roma)

b) da *Enciclopedia delle matematiche elementari* e *complementi* a cura di LUIGI BERZOLARI, GIULIO VIVANTI, DUILIO GIGLI -Volume II, Parte II (pp. 1-71) - Hoepli: Milano 1930 - 1950.

- *XXXI* - *Massimi e minimi* di EUGENIO G. TOGLIATTI {Genova) .

[2] L'introduzione del termine OTTIMIZZAZIONE può essere ritenuta naturale, dato che il termine non si presta a equivoci del tipo di quelli che indussero l'economista VILFREDO PARETO (1848-1923) a introdurre il termine *ofelimità* per indicare l'utilità in senso economico (cfr. § 5).

[3] Nell'articolo citato alla nota [1], A. PADOA ricorda che già JAKOB STEINER (1796-1863) "si doleva del fatto che, nello studio delle questioni geometriche di massimo e di minimo, la sintesi fosse stata quasi interamente negletta, per seguire i procedimenti più comodi dell'analisi" e osserva che "…certo è che la Sintesi pone in più viva luce l'intimo legame tra le proprietà delle figure e sovente si giova di argomentazioni più immediate di quelle cui ricorre l'Analisi".

PARTE SECONDA
N.d.R.

La seconda parte dell'articolo per Nuova Secondaria avrebbe dovuto riguardare l'approccio elementare al problema dell'Ottimizzazione, a cura di Gabriele Lucchini, a partire da suoi precedenti interventi e proposte didattiche.
Voglio dunque riportare qui la bibliografia di G. Lucchini sull'argomento.

Lavori di G. Lucchini sull'Ottimizzazione.

1972 *Corso di valutazione e scelta degli investimenti in condizioni di certezza*, Milano, Etas Kompass, pp. XX+288.

1972 *Diagrammi triangolari: risolubilità ed ottimizzazione*, Didattica delle scienze, n. 39, pp. 39-48.

1974 *L'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo* - I, Didattica delle scienze, n. 54, pp. 6-12, con contributi di EMMA GALLAZZI, DOMENICO LOREFICE, GABRIELLA MONTRASIO MERLO.

1975 *L'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo* - II, Didattica delle scienze, n. 55, pp. 11-15, idem.

1975 *L'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo* - III, Didattica delle scienze, n. 56, pp. 13-18, idem. (Vedere Scheda N. 13).

1984 Invito a "L'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo", Incontri sulla matematica, a cura di Bruno D'Amore, Roma, Armando, 1984, pp. 64-71.

2009 Un invito a riflessioni sulla ottimizzazione, in

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath

Si può vedere anche la pagina Web in aggiornamento permanente

http://mat.unimi.it/users/lucchini/rp-otmz.htm

Voglio anche ricordare almeno le due referenze

C. F. Manara. ***Argomenti vecchi e insegnamenti nuovi: i diagrammi triangolari***. Le Scienze (la Matematica e il loro insegnamento), 2-3, (1965), 107-115.

C. F. Manara, P. C. Nicola. *Elementi di economia matematica*. Viscontea, Milano, 1967.

Carlo Felice MANARA

PROBLEMI RECENTI DI OTTIMIZZAZIONE.

1 - Si può sostenere (Vedere Parte Prima: “L'ottimizzazione: dimensioni storico-culturali e matematiche”) che i problemi di ottimizzazione sono antichi quasi come la matematica. Tuttavia la scienza dei decenni più vicini a noi ha visto questi problemi configurarsi in modo specifico: si potrebbe dire che la maturazione ed il progresso della matematica e dei suoi metodi hanno permesso l’impostazione e la soluzione di problemi che la matematica classica non aveva preso in considerazione.
In tale ordine di idee si potrebbe dire che la visione moderna di questa problematica ha il suo inizio con la seconda metà del secolo XVIII, ed in particolare con l’opera di Leonardo Eulero. Si deve infatti a questo matematico l’inizio di quel fondamentale capitolo della matematica moderna che viene designato con l’espressione “Calcolo delle variazioni“. Questo capitolo ha oggi una estensione imponente, che rende difficile l’impresa di darne una visione anche sommaria; cercheremo pertanto di presentare lo spirito di questa problematica, presentando alcuni problemi classici, che hanno dato origine a queste ricerche.

2 - Uno dei primi problemi che si sono presentati all’attenzione dei ricercatori è quello comunemente indicato come “problema della geodetica”. È noto che, in geometria euclidea, si dimostra che la retta congiungente due punti di un piano o dello spazio è la linea che ha la minima lunghezza possibile. È appena necessario osservare che questo enunciato presuppone che si possa definire il concetto di retta indipendentemente da quello di lunghezza, e che questo ultimo concetto, a sua volta, possa essere costruito sulla base di opportuni postulati e teoremi. Ricordiamo tuttavia che, nel corso della storia della geometria, sono stati adottati degli atteggiamenti diversi: classico per esempio è il caso di certi indirizzi geometrici secondo i quali il concetto di lunghezza era scelto come fondamento per costruire il concetto di retta; e quest’ultima era appunto definita come il “cammino di lunghezza minima tra due punti”. Una definizione di questo tipo si può leggere, per esempio, nel classico trattato di A. M. Legendre, intitolato "Eléments de Géométrie", apparso nel 1849.

I progressi della Geometria differenziale che ebbero inizio nella seconda metà del Sec. XVIII permisero di indagare le proprietà delle superfici diverse dal piano; talmente diverse che, per una superficie cosiffatta, immaginata realizzata da un velo sottilissimo, indefinitamente flessibile ed inestendibile, fosse impossibile l’operazione che la porti ad adagiarsi sul piano, con conservazione delle lunghezze degli archi di curva. In particolare, la superficie sferica è un tipico esempio di ente geometrico dotato di queste proprietà; ma l’applicazione dei metodi dell'Analisi matematica alla geometria permise di costruire infinite superfici non applicabili sul piano. Nel caso della sfera, la geometria classica possedeva già un insieme di teoremi (organizzati in un intero corpo di dottrina: la trigonometria sferica); in forza di questi si dimostra che, dati due punti abbastanza vicini tra loro sulla sfera, il cammino di minima lunghezza che li unisce è l’arco di cerchio massimo determinato da essi. Ma per superfici diverse dalla sfera le dimostrazioni basate sui metodi classici si mostrarono presto impossibili, e fu necessario ricorrere ai metodi dell’Analisi matematica. Nello stesso periodo di tempo, la Meccanica razionale proponeva un'altra classe di problemi importanti; tra questi rimase classico il problema che viene chiamato “della brachistocrona”; esso conduce a cercare il cammino che un punto pesante P percorre nel tempo minimo possibile, per scendere da una posizione A ad un'altra posizione B (ovviamente a quota inferiore) sotto l'effetto del proprio peso.

3 - I problemi di cui abbiamo fatto cenno, ed altri numerosissimi analoghi, aprivano un capitolo nuovo e molto importante dell'Analisi matematica, capitolo che oggi viene richiamato con l'espressione "Calcolo delle variazioni". Per comprendere, anche solo in modo sommario, la differenza radicale fra i problemi presentati e quelli risolti dalla Matematica precedente, basti osservare che in quest'ultima dottrina si ricerca un oggetto matematico singolo (numero, gruppo di numeri, figura ecc.) che soddisfa a determinate condizioni che lo rendono ottimale, in relazione ad un determinato problema. Invece nel calcolo delle variazioni si ricerca addirittura una funzione o un insieme di funzioni, cioè una legge di corrispondenza tra gli elementi di due insiemi, elementi che sono in numero infinito, nei casi che interessano di più. Per esempio, nei problemi che abbiamo presentato sopra si ricercano delle curve, ed il numero che stabilisce il criterio per la ottimalizzazione deve essere calcolato prendendo in considerazione globalmente tutta una curva: nel caso della geodetica si tratta della sua lunghezza; nel caso della brachistocrona si tratta del tempo che il grave impiega a percorrerla sotto le condizioni precisate. La procedura impiegata per garantire che un determinato oggetto matematico, per esempio - nel caso della geodetica - una curva, sia soddisfacente il problema di ottimalizzazione enunciato è analoga a quella impiegata per garantire che un certo valore di una determinata funzione è un massimo (o un minimo) locale: in quest'ultimo caso, come abbiamo visto, si confronta tale valore con tutti quelli che la funzione assume in punti abbastanza vicini; nel caso della curva che congiunge due punti, si confronta la sua lunghezza con quella di tutte le altre curve che passino per gli stessi punti e che siano abbastanza vicine a quella considerata. In questo secondo caso tuttavia il procedimento è molto più complesso che non nel primo, perché richiede di assegnare tutte le infinite altre funzioni che diano le curve da confrontare con quella data; ma soprattutto richiede che sia precisato in modo univoco e chiaro il concetto di "abbastanza vicino" che abbiamo presentato poco sopra; concetto che appare abbastanza chiaro alla immaginazione, ma che richiede delle analisi delicate se si vuole utilizzarlo in modo rigoroso.

4 - I problemi che abbiamo presentati alla fine del paragrafo precedente hanno dato origine ad una intera ed importante branca dell'Analisi matematica moderna, branca che viene abitualmente chiamata "Analisi funzionale". Non è possibile presentare qui con un minimo di completezza questa dottrina, e pertanto ci limitiamo a ricordare che, con grande ingegnosità, uno dei fondatori di essa, e precisamente quel L. Eulero che abbiamo già citato, ha ricondotto la soluzione dei problemi di calcolo delle variazioni alla soluzione di una o più equazioni differenziali del secondo ordine. In altre parole, si è verificato in quest'ambito ciò che abbiamo già osservato a proposito del problema dei valori ottimali di una o più funzioni; invero, in quest'ultimo caso, il problema è stato ricondotto alla soluzione di una o più equazioni, cioè alla soluzione di un problema più semplice e meglio noto; nel caso del calcolo delle variazioni, il problema complesso delle funzioni ottimali viene ricondotto a quello della soluzione di una o più equazioni differenziali; problema quest'ultimo che può essere considerato relativamente più facile.

Occorre tuttavia osservare che la riduzione di cui abbiamo detto, del problema della ricerca dei valori ottimali di una funzione a quello della soluzione di una o più equazioni, è possibile soltanto sotto determinate condizioni; una di queste è la esistenza delle funzioni che vengono chiamate "derivate"; su altre condizioni ritorneremo nel seguito, perché la loro analisi permetterà di presentare nuovi capitoli e nuove procedure per la soluzione di problemi matematici di questo tipo. Nel caso dei problemi di calcolo delle variazioni è possibile fare alcune osservazioni preliminari, sulle quali si fonda la discussione, cioè la valutazione delle soluzioni eventualmente trovate: anzitutto si osserva che le procedure che abbiamo presentato, ed altre che sono state escogitate, conducono alla ricerca di condizioni necessarie perché un determinato oggetto matematico sia soluzione dei problemi di calcolo delle variazioni enunciati; infatti, in questi ed in altri casi, i calcoli matematici forniscono gli strumenti per la deduzione certa ed ineccepibile; e già i Greci avevano classificato la deduzione come procedura di analisi, osservando che in questo modo un problema viene trasformato in un altro, ma che non è detto che ogni soluzione del secondo sia anche soluzione del primo, cioè del problema dato. Quindi, dopo l'analisi, cioè dopo la deduzione che trasforma un problema in un altro, occorre praticare la sintesi, cioè ricercare, tramite una opportuna discussione, quali soluzioni del secondo problema siano effettivamente anche soluzioni d quello dato. È poi anche possibile che, applicando la procedura di analisi, si siano introdotte delle ipotesi tacite, che occorrerebbe rendere esplicite, se si vuole raggiungere la massima generalità della soluzione.

Crediamo utile illustrare le argomentazioni che stiamo esponendo richiamando un esempio già considerato: dati due punti A e B su una sfera, le procedure del calcolo delle variazioni riconducono la ricerca del cammino di minima lunghezza che li congiunge alla soluzione di una equazione differenziale; se due punti non sono diametralmente opposti sulla sfera, quest'equazione ha come soluzione il circolo massimo che passa per A e per B. Ma questi due punti dividono il circolo stesso in due segmenti; uno di essi, nella ipotesi enunciata, fornisce il minimo cammino tra i due punti; l'altro fornisce il massimo tra i cammini possibili, che soddisfino a certe condizioni di regolarità; se poi i punti sono diametralmente opposti il problema del minimo percorso ha come soluzioni gli infiniti semicircoli massimi della sfera che li congiungono.

Questo esempio elementare chiarisce, almeno in parte, il significato della espressione generica che abbiamo impiegato poco sopra, dicendo che la soluzione del problema del cammino di minima lunghezza, che unisce due punti A e B "abbastanza vicini " su una superficie, è la curva soluzione di una o più equazioni differenziali. La discussione che ha condotto a precisare le condizioni anche sufficienti perché una curva cosiffatta sia soluzione del problema del minimo cammino sono state oggetto di delicate ed approfondite analisi durante l'Ottocento.

5 - Le ricerche collegate con le geodetiche, in spazi sempre più generali ed astratti, hanno dato luogo a numerose applicazioni alla Fisica ed alla Meccanica, applicazioni di cui diremo in seguito. Qui ci soffermeremo sulle generalizzazioni delle procedure più lontane nel tempo del calcolo delle variazioni; parleremo qui delle generalizzazioni classiche, e dedicheremo il prossimo paragrafo alle procedure più recenti.

Un primo passo per generalizzare le procedure del calcolo delle variazioni è stato compiuto passando da una a più dimensioni cioè, in altre parole, dalla ricerca delle curve che risolvono certi problemi di ottimalizzazione a superfici o a varietà di dimensione maggiore. Un esempio classico di problemi di questo tipo è fornito dalla ricerca delle superfici di area minima passanti per determinate curve dell'ordinario spazio tridimensionale; il problema fisico strettamente collegato a queste ricerche è quello detto di Plateau, della ricerca della configurazione delle lamine sottili tese, per esempio delle bolle di sapone. (*) Altri problemi di fisica pratica e teorica possono essere inquadrati nella stessa classe di questi.

6 - Un ulteriore passo nella direzione della generalizzazione dei problemi di calcolo delle variazioni è stato compiuto recentemente con la costruzione di una teoria che viene abitualmente detta "del controllo ottimale". Con questa teoria si prendono in considerazione due spazi a più dimensioni: uno è lo spazio nel quale si svolge la evoluzione di un sistema variabile nel tempo, il secondo è uno spazio astratto, che viene chiamato "spazio dei controlli"; il sistema che si considera può essere un insieme di punti materiali, o un oggetto materiale soggetto a sollecitazioni varie, oppure un sistema economico, sottoposto alle leggi di evoluzione studiate dall'Economia, oppure un altro sistema qualunque; l'evoluzione di questo è retta da un sistema di equazioni differenziali, ma non è completamente determinata da queste: infatti tale evoluzione è completamente conosciuta quando si assegnino anche certe variabili, chiamate appunto "variabili di controllo". E questa assegnazione può essere fatta in modo da soddisfare a certe condizioni, tra le quali per esempio quella di rendere minimo (o massimo) un certo numero, calcolato globalmente su tutta l'evoluzione del sistema; per esempio si può imporre di rendere minimo il periodo di tempo che trascorre tra un istante iniziale ed il raggiungimento di un certo scopo, naturalmente nel rispetto delle leggi proprie del sistema.

Non è possibile esporre qui l'intera teoria, che è stata iniziata da Pontryagin e sviluppata da molti altri ricercatori sulla scorta delle idee fondamentali esposte da questo Autore. Ci limitiamo pertanto ad illustrare in modo sommario la soluzione di un problema già trattato, quello della geodetica su una superficie, o in generale su una varietà. Secondo l'impostazione della teoria del controllo ottimale, la determinazione di una curva che rende minima la lunghezza del cammino tra due punti può essere conseguita considerando in ogni punto della curva come variabili di controllo i parametri che determinano la direzione della tangente. In forma imprecisa, ma suggestiva, si potrebbe dire che il procedimento matematico riproduce in qualche modo il comportamento di un pilota che sceglie ad ogni istante la direzione che lo conduce alla meta nel miglior modo possibile. Si constata che questi metodi permettono di risolvere dei problemi più generali di quelli classici: infatti la ricerca di insiemi di controlli ottimali può essere condotta applicando, nello spazio dei controlli, delle procedure di ricerca di massimi o minimi che sono più generali di quelle classiche, come vedremo nelle pagine che seguono. La grande generalità e la potenza di questi nuovi metodi permettono la loro applicazione anche in campi diversi dalle tradizionali applicazioni della matematica; per esempio, come si è già detto, all'Economia ed alla teoria generale dei sistemi.

Su una linea analoga a quella seguita da Pontryagin si sviluppano le ricerche del Bellman (Vedere Scheda N. 9), il quale ha enunciato un "principio" che trova numerose applicazioni nella tecnica e nella ricerca operativa. Ricorrendo anche qui ad immagini suggestive, anche se poco precise, si potrebbe dire che il principio del Bellman traduce in forma astratta e rigorosa l'osservazione secondo la quale, considerata una traiettoria che in uno spazio astratto conduce un sistema da un punto A ad un punto B in modo ottimale (ovviamente rispetto ad un determinato scopo), allora ogni segmento parziale della stessa traiettoria è pure ottimale, ovviamente rispetto ai propri estremi e rispetto allo scopo fissato. Per l'utilizzazione del principio di Bellman non è necessario che i problemi siano espressi mediante gli strumenti dell'Analisi matematica classica: il procedimento può essere applicato anche in casi più generali, come quelli che spesso si presentano in Ricerca operativa.

7 - Nei paragrafi precedenti abbiamo passato in rassegna alcune generalizzazioni delle procedure classiche di ottimizzazione; ci occuperemo qui di altre procedure recenti, che si avvalgono delle teorie moderne della matematica, e che permettono di utilizzare i moderni strumenti di calcolo e di elaborazione dell'informazione, conducendo così a risolvere problemi teoricamente e praticamente non affrontabili nel passato, anche prossimo.
Per cercare di esporre, anche in modo sommario e rudimentale, questi problemi e le procedure che li risolvono, vorremmo ricordare che, nella impostazione dei problemi di ottimalizzazione con gli strumenti classici, ci si fonda su certe ipotesi; questi punti di partenza sono adottati talmente di frequente che vengono spesso considerati come evidenti o, come si suol dire, naturali; si tratta invece sempre di ipotesi che conviene analizzare e soppesare, il che permette di estendere l'orizzonte delle ricerche e delle soluzioni dei problemi classici.

Una tra le ipotesi che si accettano più di frequente nella ricerca della soluzione di massimi o minimi di una funzione di una o più variabili è che tale ricerca può essere condotta in due stadi: anzitutto si ricercano massimi o minimi cosiddetti locali, ed in secondo luogo si ricercano i massimi o minimi in tutto l'insieme nel quale la funzione è definita tra i massimi o i minimi locali. A sua volta, un valore della funzione viene definito un massimo locale (ed analoga definizione si dà per il minimo locale) se esso è maggiore di tutti quelli che corrispondono a punti dell'insieme di definizione che siano abbastanza vicini; cioè se esiste un intorno del punto appartenente all'insieme di definizione, in ogni punto del quale la funzione abbia un valore minore di quello che assume nel massimo.

Le procedure classiche dell'Analisi matematica, come abbiamo detto, conducono a cercare i massimi (oppure i minimi) locali di una data funzione tra le radici di una seconda funzione, chiamata "derivata" che, sotto certe ipotesi, si sa costruire. Di conseguenza la soluzione del problema di ottimizzazione viene ricondotta alla ricerca della soluzione o delle soluzioni di una equazione o di un sistema di equazioni. Pertanto la ricerca dei valori ottimali di una funzione può non essere possibile quando manchi, anche in un solo punto dell'insieme di definizione, la funzione che, con i suoi zeri, fornisce i valori tra i quali va cercato quello che si vuole. Si osserva inoltre che le procedure ora descritte permettono di determinare soltanto i valori ottimali quando i punti ai quali essi corrispondono siano interni all'insieme nel quale la funzione viene considerata; si vengono così a perdere i valori ottimali che eventualmente cadessero in punti della frontiera dell'insieme stesso (si veda la Scheda N. 7.)
Ora esiste una vasta classe di problemi pratici e teorici, i quali conducono alla ricerca di valori ottimali di certe funzioni situati proprio nella frontiera degli insiemi in cui le funzioni vengono considerate: si tratta per esempio dei problemi che vengono chiamati di programmazione lineare, che si incontrano con molta frequenza nella tecnica e nella ricerca operativa. Per tali problemi la ricerca di soluzioni non può essere condotta con le procedure classiche, e deve invece essere cercata con criteri diversi. La soluzione numerica concreta di problemi come questi, pur non essendo concettualmente difficile, richiede tuttavia in generale

numerosissimi e pesanti calcoli, che rendono necessario l'impiego di strumenti di calcolo automatico e di elaborazione dell'informazione. Occorre tuttavia osservare che la costruzione e l'impiego efficace di questi apparati hanno richiesto e tuttora richiedono approfondimenti teorici nell'ambito della teoria dell'informazione, dell'algebra astratta e della logica. Si verifica quindi, ancora una volta, il fatto che i problemi della scienza applicata stimolano molto spesso il matematico alla costruzione di teorie, e corrispondentemente, il progresso tecnico può mettere a disposizione della scienza astratta un insieme di mezzi che la fanno progredire spesso in modo inaspettato.

I problemi della programmazione lineare costituiscono tuttavia soltanto una classe ristretta (anche se molto importante per le applicazioni) di ricerca di valori ottimali di frontiera. In generale lo schema teorico per la risoluzione di tali problemi è fornito dalle relazioni che vengono chiamate "Condizioni di Kuhn e Tucker ". Ovviamente non è possibile qui esporre queste teorie con un minimo di completezza e di rigore; tuttavia nella Scheda N. 7 daremo qualche illustrazione geometrica, che permetterà al lettore di avere una idea sommaria delle idee ispiratrici delle procedure a cui abbiamo accennato.

8 - È stato affermato da un grande matematico (D. Hilbert) che la Matematica astratta non esisterebbe senza la Fisica, la Meccanica, la Geometria; crediamo che si possano interpretare queste parole dicendo che le tre dottrine sunnominate hanno fornito gli stimoli, le occasioni, i problemi per la costruzione delle teorie matematiche, anche le più astratte. Tuttavia si potrebbe osservare che le applicazioni della Matematica non si limitano alle scienze nominate; anzi l'orizzonte delle scienze che si ispirano alla Matematica nella loro struttura concettuale, e utilizzano i suoi strumenti per la soluzione dei problemi si amplia sempre di più. Sarebbe facile osservare gli stretti legami che uniscono la moderna scienza dei calcolatori elettronici, ed in generale l'informatica, con l'algebra astratta e la logica formale. Tuttavia si potrebbe osservare che gli episodi iniziali e significativi dell'ampliamento dell'orizzonte delle scienze legate alla Matematica sono rappresentati dall'opera di V. Volterra sulla lotta biologica, e di V. Pareto sull'Economia. Ci soffermeremo in particolare su quest'ultimo studioso, perché la impostazione delle sue ricerche si basa sulla problematica di ricerca di situazioni o di valori ottimali. Invero nella teoria del comportamento del consumatore Pareto applica metodicamente le procedure di ricerca di valori ottimali di funzioni in condizioni vincolate, utilizzando gli schemi teorici dovuti a Lagrange (si veda la Scheda N. 4). La soluzione che Pareto dà del problema del consumatore si fonda sulla ipotesi che esista per questi una funzione di utilità (Pareto impiega il termine "*ofelimità*", derivato dal greco), la quale permette in qualche modo di ricondurre il confronto tra due situazioni di consumo di due diversi "panieri di beni" al confronto tra due numeri; tuttavia il consumatore deve acquistare sul mercato ognuno dei beni, e per questa operazione di acquisto deve sottostare alla limitazione che gli è data dall'impossibilità di superare una data spesa globale, che gli è permessa dal proprio reddito.

Il problema del consumatore non è il solo al quale possono essere applicate le procedure matematiche di ricerca di valori ottimali: analoghe procedure si possono seguire anche per il problema della produzione dei beni (si veda la Scheda N. 7). Si può aggiungere che l'impostazione che Pareto ha dato dei problemi dell'Economia si fonda su certe ipotesi riguardanti i sistemi economici che possono non essere sempre valide nella realtà: è tuttavia spesso possibile escogitare gli strumenti concettuali e matematici che permettano di superare queste difficoltà. Tra gli strumenti di questo tipo ricordiamo in particolare la Teoria dei giochi e delle strategie, che è stata iniziata da van Neumann e G. Morgenstern e che ha avuto successivi·imponenti sviluppi. Anche in questa teoria si trattano problemi di ricerca di situazioni ottimali, sotto determinate condizioni che traducono le competizioni tra due o più soggetti in concorrenza tra loro. Non è possibile dare un'idea, anche sommaria, di questa teoria, e di altre che sono strettamente collegate con essa, come la teoria dei cosiddetti "Giochi differenziali"; rimandiamo alla Scheda N. 8 per la presentazione di alcuni esempi concreti, che mirano a dare un'idea sommaria e rudimentale di questi sviluppi.

9 - Il panorama delle questioni di matematica applicata che si riattaccano alla teoria dell'ottimizzazione non sarebbe completo se tralasciassimo di ricordare i vasti capitoli della meccanica razionale, della fisica e della fisica matematica (**) i cui contenuti possono essere esposti in modo particolarmente chiaro e suggestivo facendo ricorso ai metodi della ottimizzazione matematica. Abbiamo già ricordato che le leggi dell'ottica geometrica, ed in particolare della rifrazione e della riflessione, possono essere formulate dicendo che il percorso della luce, nel passaggio da un punto ad un altro, è tale che il tempo di percorrenza è il minimo possibile.

Accanto a questa legge dell'ottica stanno anche le altre leggi della meccanica dei sistemi, le quali possono essere enunciate facendo riferimento a situazioni di ottimalità; da un certo punto di vista, si potrebbe dire che gli enunciati di questo tipo possono essere posti in relazione con una visione delle leggi della Natura che tende e mettere in luce una razionalità profonda nella costituzione dell'Universo. Tralasciamo per il momento di insistere su questi modi di vedere, per passare in rassegna brevemente alcuni tra i numerosissimi enunciati della meccanica e della fisica matematica che si ispirano a questa impostazione Anzitutto ricorderemo gli enunciati relativi alla statica; in questo campo si possono prendere in considerazione anzitutto i problemi dell'equilibrio dei sistemi materiali pesanti, cioè di quei sistemi che sono sottoposti alle sole forze esterne date dalla gravitazione terrestre; per questi sistemi vale il teorema che viene richiamato con la espressione "principio di Torricelli", dal nome del celebre allievo di Galileo, al quale si debbono scoperte fondamentali nella fisica e nella matematica. Il principio in parola afferma che un sistema materiale pesante è in equilibrio sotto l'azione del solo suo peso e dei vincoli, quando il baricentro ha la quota minima possibile (compatibilmente con i vincoli); poiché la forza peso deriva da un potenziale, lo stesso principio può essere enunciato dicendo che la situazione di equilibrio corrisponde ad un minimo dell'energia potenziale che il corpo possiede sotto l'azione della gravità. In questa seconda formulazione appare chiaro che l'enunciato può essere generalizzato per formulare le condizioni di equilibrio quando il corpo è sottoposto ad un sistema qualunque di forze che siano conservative, cioè che derivino da un potenziale.

È possibile anche formulare dei principi che reggono la configurazione di equilibrio di sistemi continui elastici, soggetti a forze che provocano delle deformazioni; l'esposizione completa ed esauriente di questi problemi richiederebbe un apparato tecnico di formalismi matematici che qui non intendiamo esporre; ci limiteremo quindi a ricordare che, sotto opportune ipotesi, la configurazione di equilibrio di un sistema deformabile elastico si verifica quando sia minimo il valore di una quantità che viene·chiamata (in questo contesto) "seconda energia interna".

Osserviamo che la proposizione di Torricelli, e le sue generalizzazioni, viene chiamata “principio” con il significato che a questo termine viene dato tradizionalmente in meccanica ed in fisica matematica; tale termine, in questi contesti, non vuole significare che una proposizione che si considera è un assioma logico; ma semplicemente nella tradizione della meccanica viene chiamata “principio” una proposizione che traduce il risultato di certe osservazioni assolutamente elementari, oppure una proposizione che possa servire da punto di partenza per intere teorie, che fondano la loro validità appunto su quella della proposizione considerata, e che, con la loro validità e fecondità di conseguenze convalidano indirettamente anche la validità dei principi enunciati.

10 - Avendo presenti le precisazioni terminologiche con le quali abbiamo terminato il paragrafo precedente, passiamo ad enunciare altri principi, riguardanti questa volta la dinamica dei sistemi materiali. Il primo principio cui accenniamo può essere formulato con riferimento alle fondamentali equazioni di Lagrange, che reggono il moto di un sistema qualsivoglia formato da punti materiali. Dal punto di vista strettamente formale si può osservare che tali equazioni sono esteriormente analoghe a quella celebre equazione con la quale Leonardo Eulero formalizzò la ricerca del valore ottimale di una certa quantità globale, calcolata su tutti i valori presi da una funzione incognita in un determinato intervallo di valori della variabile indipendente. Quindi, in questa luce, le equazioni di Lagrange si presentano come le immediate e naturali generalizzazioni dell'equazione di Eulero, e dunque è facile presumere che i fenomeni dominati dalle equazioni di Lagrange possano essere descritti con enunciati che fanno riferimento alla ricerca di valori ottimali.

Effettivamente, supponendo che il sistema sia sottoposto a vincoli privi di attrito, e che il suo moto avvenga per effetto di un sistema di forze generale da un potenziale, le equazioni di Lagrange possono essere scritte quando si accetti la validità del cosiddetto “Principio dell'equipartizione dell’energia”. Il principio suddetto può essere formulato nei termini seguenti:

Il moto di un sistema materiale, limitato da vincoli privi d'attrito e sottoposto a forze che derivano da un potenziale, avviene in modo che, nel passaggio da una situazione iniziale alla situazione finale, sia minima la differenza tra il valor medio dell’energia cinetica e il valor medio dell'energia potenziale.

La formulazione che abbiamo dato ora si riferisce ad un caso particolare (relativo alle ipotesi formulate) di un principio più generale, che viene chiamato “Principio di Hamilton” o anche “Principio della minima azione”, che domina il moto dei sistemi materiali in condizioni ancora più generali di quelle enunciate.

11 - Il principio di Hamilton or ora formulato non è il solo che possa servire come punto di partenza per la deduzione delle leggi del moto di un sistema materiale; infatti si può giungere allo stesso scopo prendendo in considerazione le forze che sono sviluppate dalle strutture materiali che realizzano i vincoli per il moto del sistema stesso. In questo ordine di idee, si può definire una funzione della situazione del sistema che viene chiamata “costrizione dei vincoli”, ed in relazione a tale funzione il Gauss, enunciò il principio che porta il suo nome e che viene anche richiamato con l’espressione “Principio della minima costrizione dei vincoli”. Esso può essere enunciato nella forma seguente:

Fra tutti i movimenti di un sistema, che siano conformi ai vincoli, il movimento naturale avviene con la minima costrizione dei vincoli.

La formulazione del principio di Gauss e di altri viene spesso resa sintetica ricorrendo a certe immagini geometriche, mediante le quali i parametri che determinano la posizione del sistema nello spazio ordinario sono interpretati come coordinate di un punto in un iperspazio ad un numero opportuno di dimensioni, con questa immagine la evoluzione del sistema materiale nel nostro spazio ordinario viene rappresentata con il moto, in questo iperspazio, del punto rappresentativo del sistema, ed i vincoli ai quali quest'ultimo è sottoposto vengono rappresentati con opportune ipersuperfici dell'iperspazio rappresentativo.

Questo linguaggio geometrico permette di enunciare in forma sintetica e compatta molte proposizioni della meccanica; in particolare, nel caso in cui sul sistema materiale non agiscano forze e quindi il moto del sistema avvenga per sola inerzia, il principio del Gauss viene enunciato nella forma ridotta, che viene anche richiamato con la espressione “Principio di Hertz, o principio della direttissima”: esso è contenuto nella proposizione seguente:

Un sistema che non sia soggetto a forze attive evolve in modo che il suo punto rappresentativo si muova, in un opportuno iperspazio, con velocità costante, in modo che la curvatura (iperspaziale) della traiettoria, che dà l'immagine del fenomeno nello spazio rappresentativo sia la minima possibile. In forma suggestiva si potrebbe esprimersi dicendo che la curva che rappresenta convenzionalmente il fenomeno di moto sia più “diritta” possibile.

Questo principio prelude alla impostazione relativistica della meccanica, impostazione che, come vedremo, traduce in forma completamente geometrica fenomeni meccanici, ed identifica di conseguenza nella geodetica di una opportuna varietà riemanniana la traiettoria del punto che rappresenta convenzionalmente il fenomeno meccanico.

Ricorderemo infine la proposizione che enuncia un classico principio, il quale viene spesso richiamato come “Principio di Maupertuis” dal nome del matematico che lo enunciò nel secolo XVIII; la proposizione fu rigorosamente dimostrata da Eulero, per il moto di un unico punto, e viene anche richiamata con la espressione di “Principio di Holder” o anche “Principio della minima azione”.

Anche in questo caso l'enunciato rigoroso del principio richiederebbe un insieme di strumenti tecnici che qui non possiamo utilizzare. Per tentare di dare qualche idea sommaria del significato della proposizione possiamo immaginare un sistema che si muove, ed un secondo sistema la cui situazione, istante per istante, è molto vicina a quella del sistema reale dato; il moto del secondo sistema verrà chiamato “moto variato”. Supponiamo che le forze agenti sul sistema siano conservative e quindi derivino da un potenziale si potrà per tanto anche parlare di una energia potenziale del sistema; si supponga che la variazione del moto avvenga in modo che resti costante l’energia totale del sistema, energia che risulta dalla somma della energia cinetica e della energia potenziale. Una variazione cosiffatta verrà chiamata “isoenergetica” ed il moto del sistema variato verrà chiamato “moto variato isoenergetico”. Si definisce poi “azione” del sistema una quantità calcolata globalmente durante tutto il moto, con riferimento soltanto alla energia cinetica del sistema.

Con queste premesse sommarie il principio di Holder può essere enunciato nella forma seguente:

Tra tutti i moti variati isoenergetici, il moto naturale di un sistema avviene in modo che l’azione del sistema sia stazionaria.

Sotto particolari ipotesi poi, si dimostra che l'azione è non soltanto stazionaria, ma addirittura minima.

12 - Nei paragrafi precedenti abbiamo accennato alla rappresentazione convenzionale di un sistema mediante un punto di uno spazio opportuno, avente un opportuno numero di dimensioni; abbiamo anche detto che queste rappresentazioni preludono alla impostazione che dei problemi meccanici dà la Relatività. Non intendiamo qui enunciare completamente i principi di questa dottrina; ci limitiamo ad osservare che in essa si giunge ad una formulazione delle leggi della meccanica che le assimila alle proprietà geometriche di una varietà quadridimensionale (il cosiddetto “cronotopo"); di conseguenza l’influenza della presenza di materia nello spazio viene tradotta mediante opportune proprietà della varietà geometrica che rappresenta l’universo spazio-temporale; e la legge del moto di un punto viene tradotta mediante le curve geodetiche, le quali rappresentano i cammini di minima lunghezza sulla varietà stessa.

Anche in campi della fisica diversi dalla meccanica si possono enunciare dei principi, analoghi a quelli che abbiamo presentato finora, che traducono le leggi fisiche facendo riferimento a valori ottimali di certe funzioni, opportunamente scelte o costruite: ciò può avvenire nella termodinamica, nell’elettrologia, nella teoria dei fluidi, ecc.

Queste proposizioni permettono di enunciare le leggi della fisica in una forma spesso molto suggestiva e sintetica; ciò può forse spiegare il fatto che spesso la validità di queste proposizioni sia stata considerata come la prova di una razionalità insita nella Natura, razionalità che ci si rivela via via con l'approfondimento delle leggi naturali. Si direbbe addirittura che alcuni autori assegnino alla scienza un compito quasi religioso, di scoprire con il loro lavoro le leggi che il Creatore ha scritto con sapienza nella Natura.

Con tutto il rispetto delle buone intenzioni di questi autori, non ci sentiamo di condividere queste opinioni; ci pare infatti che esse travalichino i limiti e le possibilità della scienza, e soprattutto della scienza fisico-matematica. Questa infatti, a nostro parere, raggiunge propri scopi spesso dopo aver drasticamente semplificato i risultati delle osservazioni: pertanto l’apparente semplicità e la innegabile eleganza di certe proposizioni si accompagnano spesso alla necessaria approssimazione dei risultati, qualora questi si vogliano intendere come verità con significato assoluto.

Noi pensiamo infatti, con H. Poincaré, che non si possa parlare in assoluto di teorie scientifiche vere o di teorie false, ma soltanto di teorie più o meno adeguate ad una certa realtà che si vuole conoscere sempre meglio. Questo atteggiamento ci pare ben lontano da un radicale scetticismo nella capacità della mente umana di conoscere la verità; esso ci pare invece consono alla natura della conoscenza scientifica, ed in particolare alla natura della matematica. Invero questa scienza ha dei propri oggetti una conoscenza la cui natura è peculiare, per chiarezza e certezza; ma non possiamo pretendere che gli oggetti materiali abbiano quella trasparenza concettuale che è tipica degli oggetti della matematica. Ricordiamo inoltre che questa scienza, in epoca relativamente recente ha intrapreso a studiare certi oggetti che vengono chiamati “frattali” e certe proprietà, che vengono chiamate “caotiche”, di altri oggetti. Il nome stesso che è stato dato a questi oggetti concettuali mostra che essi non sono finora completamente conosciuti e dominati. Ma alcuni di questi oggetti sono stati costruiti proprio per dominare qualche fenomeno fisico che sfugge alla trattazione abituale e che non può essere fatto entrare nel quadro suggestivo, semplice ed elegante delle teorie che abbiamo finora presentato.

N.d.R.

(*) Si può fare riferimento al Sito

http://matematica.unibocconi.it/

dove in particolare è disponibile in formato PDF l'intervento del Professor Giordano Bruno:

Una passeggiata fra arte e matematica

…..Una passeggiata dove si incontrano sfere e bolle di sapone, poliedri e nastri infiniti, fiocchi di neve e frattali, labirinti e vie dritte impercorribili, ricami e topologia, quadrati magici e quarta dimensione, figure impossibili e l'infinito.

E inoltre al Sito

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath

(**) Fra il materiale di documentazione ritrovato vi è l'articolo di Arnaldo Masotti (vedere Scheda N. 11): *Questioni isoperimetriche nella fisica matematica*. Rendiconti del seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. 24, (1952-53), p. 3-33.

SCHEDA N. 1

dal DIZIONARIO ENCICLOPEDICO ITALIANO - Istituto della Enciclopedia Italiana. Roma

– vol. VII – 1970

massimi e minimi - Con tale espressione si indica il soggetto di molti procedimenti matematici, intesi a ricercare la massima e la minima grandezza tra un certo numero di grandezze assegnate, oppure il massimo o il minimo valore assunto da una quantità variabile.

massimizzare v. tr., non com. – Rendere massimo: portare al limite massimo;

massimizzazione s. f., non com. – L'atto, l'effetto del massimizzare;

minimizzare v. tr. – 2. in senso proprio di "ridurre al minimo", il verbo è talora usato in matematica: per esempio nel calcolo delle variazioni si parla di successioni minimizzanti di funzioni, come di successioni che tendono a una funzione che rende minima una data espressione funzionale.

– vol. VIII - 1970

ottimale agg. [der. di ottimo] – agg. Che si riferisce all'optimum.

– Supplemento – 1974

ottimizzare v. tr. [der. di ottimo]. – Rendere ottimo, portare a una condizione o a un risultato che siano considerati i migliori possibili. In particolare nella matematica e nelle sue applicazioni con riferimento a un problema le cui soluzioni dipendano da uno o più parametri o funzioni variabili, scegliere questi in modo che la corrispondente soluzione sia la migliore in relazione a un determinato fine (v. OTTIMIZZAZIONE in Suppl.).

ottimizzazione s. f. [der. di ottimizzare]. – Il raggiungimento di una situazione ottima, ossia del migliore risultato possibile nelle condizioni date o in relazione a un determinato fine. Il termine è utilizzato spec. nella matematica (v. oltre) e, in genere, nel linguaggio scientifico e tecnico.

Matematica. – Nella matematica applicata sono chiamati problemi di o. i problemi consistenti nella ricerca del massimo e del minimo di funzioni o più in generale di funzionali, liberi oppure vincolati. La ricerca delle tecniche più adatte alla soluzione di problemi di o. ha ricevuto un grande impulso negli ultimi anni, con l'avvento dei calcolatori elettronici, che permettono di risolvere numericamente, in modo esatto o approssimato, problemi che prima, per la loro complessità, o per il numero delle variabili e delle funzioni implicate, si sottraevano a ogni trattazione.

SCHEDA N. 2

DIDONE E CARTAGINE. PUBLIO VIRGILIO MARONE (70-19 a.C.).(ENEIDE tradotta da ANNIBAL CARO, a cura di O. CASTELLINO e V. PELOSO, SEI - Torino - 1947 - V edizione. Libro I - versi 586-591)

Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
sorger la gran cittade e l'alta rocca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsa nomossi, per l'astuta merce
Che, per fondarla, fèr di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.

589. **Birsa nomossi**: Birsa (dalla parola greca byrsa) vuol dire "pelle di bue". Secondo la leggenda, Didone, giunta coi Tirii in Africa, chiese a Iarba, re dei Getuli, un tratto di terra. Iarba gliene offrì quanta ne poteva essere contenuta da una pelle di bue. Didone allora fece astutamente tagliare la pelle in sottilissime strisce che, unite insieme, formarono il perimetro (semicircolare) di una considerevole quantità di terreno, entro cui fu costruita la cittadella, la quale per questo fatto si chiamò Birsa. È da osservare, d'altronde, che in fenicio *Bosra* vuol dire cittadella.

Illustriamo la situazione con un esempio, supponendo rettilinea la costa e prendendo un perimetro di lunghezza 12 in una opportuna unità (v. fig. 1). Triangolo equilatero, mezzo quadrato, mezzo esagono, semicerchio hanno aree rispettive nell'unità di misura data dal quadrato avente per lato la precedente unità di lunghezza,

$$9\sqrt{3} = 15.58...., 18, 12\sqrt{3} = 20.784..., 22.9....;$$

i lati e il raggio sono ordinatamente

$$6, 6, 4, 3.81....$$

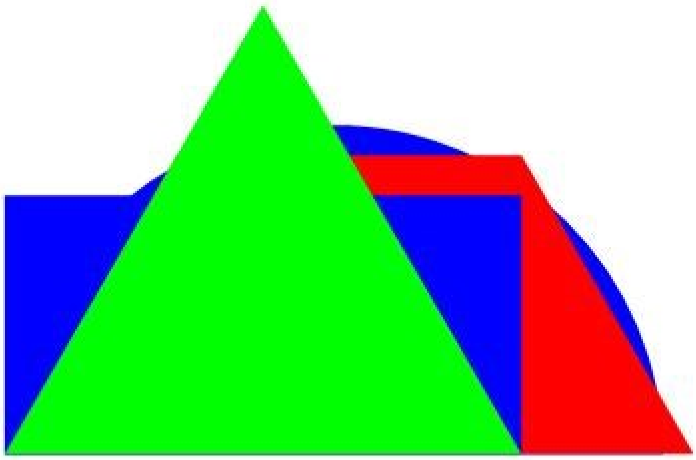


Figura 1

SCHEDA N. 3

SUI PROBLEMI DI ISOPERIMETRIA

Rimandando per una trattazione sistematica con riferimenti storici e approfondimenti critici al ben noto e autorevole articolo di OSCAR CHISINI citato alla nota[1] , ci limitiamo qui a richiamare alcuni risultati.

Teorema di ZENODORO (forse fine II secolo a.C.).

- Fra tutti i poligoni isoperimetrici di *n* lati il massimo è il regolare (fig. 1, 2).

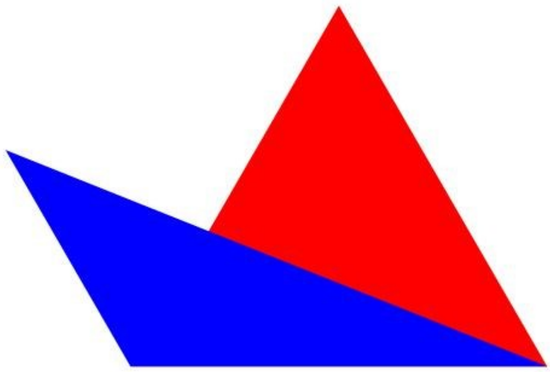


Figura 1. Triangolo equilatero di lato 1. Triangolo di lati 3/5, 1, 7/5.

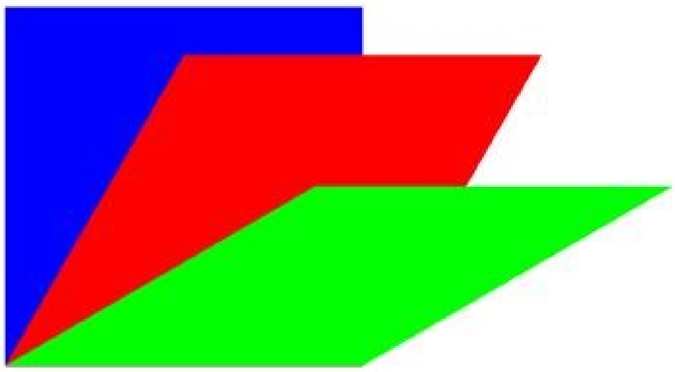


Figura 2

Proprietà isoperimetrica del cerchio.

- Il cerchio ha area maggiore di ogni poligono *P* che ne abbia lo stesso perimetro *p* (vedere Scheda n. 2).

Teorema di CRAMER (GABRIEL, 1704-1752).

- Fra tutti i poligoni di cui sono dati i lati, succedentisi in un ordine assegnato, è massimo il poligono inscritto in un cerchio.

Proprietà di minimo della riflessione della luce.

- Se un raggio di luce deve andare da un punto *A* ad un punto *B* riflettendosi su di una retta *HK* (v. fig. 3), esso segue la via più breve possibile, cioè, dati in posizione i punti *A* e *B* e la retta *HK* esterna al segmento *AB*, fra tutte le spezzate *ACB* aventi il vertice *C* sulla retta *HK*, è minima quella in cui sono uguali gli angoli *ACH* e *KCB* che *HK* forma con i due lati *AC* e *CB*.

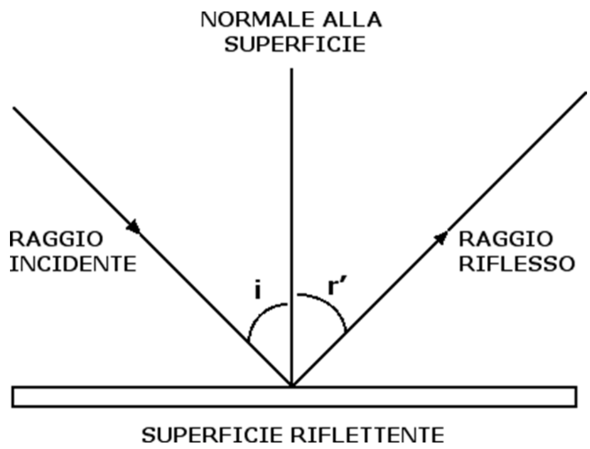


Figura 3

ERONE di Alessandria (III secolo d.C. o II o I) deduce appunto le proprietà della riflessione della luce dall'ipotesi che essa percorra il cammino più breve possibile.

Teorema del cubo.

- Il cubo è il prisma quadrangolare di volume massimo.

Proprietà isoperimetrica della sfera.

- Fra tutti i solidi di egual superficie la sfera è quello che ha volume massimo.

NB. Sull'argomento segnaliamo anche gli altri articoli citati alla nota[1].

SCHEDA N. 4

SUI PROBLEMI DI MASSIMO O DI MINIMO

1 - Si potrebbe dire che i problemi di ottimizzazione hanno stimolato la nascita e lo sviluppo dell'Analisi matematica fino dalle sue origini. Ricordiamo per esempio che G. W. von LEIBNIZ scrisse nel 1684 la sua opera intitolata *Nuovo metodo per i massimi e i minimi come pure per le tangenti che non si indugia intorno a quantità frazionarie e irrazionali, ed un singolare genere di calcolo per quei problemi* (Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus). Quello che LEIBNIZ chiama "singolare genere di calcolo" è, in sostanza, l'insieme delle regole del calcolo delle derivate; questo si presenta, nell'opera di LEIBNIZ, come lo strumento fondamentale per risolvere problemi di ottimizzazione, oltre che i problemi geometrici riguardanti il tracciamento delle tangenti alle curve.

Il LEIBNIZ, nell'opera citata, presenta l'esempio delle leggi della rifrazione della luce nel passaggio da un mezzo trasparente ad un altro. Tali leggi potrebbero essere enunciate dicendo che il percorso della luce è tale che il tempo impiegato a percorrerlo è·minimo, se confrontato a quello occorrente per un altro percorso qualsivoglia. Questo risultato era già noto a P. de FERMAT e contiene in sé, come caso particolare, anche le leggi della riflessione. Esso è un esempio di quelle impostazioni teoriche, le quali mirano a cercare nelle leggi della fisica matematica gli argomenti per dimostrare che "La Natura agisce sempre per le strade più corte", come dice il citato Fermat (La nature agit toujours pour les voies les plus courtes). Il che ha servito come pretesto per qualche pensatore per giudicare queste leggi come la dimostrazione della esistenza di una razionalità globale soggiacente all'Universo oppure di una Mente Creatrice; se non addirittura per credere di poter dimostrare che il nostro mondo è il "migliore dei mondi possibili".

Ad un livello meno elevato si potrebbe dire che i metodi del calcolo infinitesimale, in questo ordine di idee, riconducono la soluzione del problema della ricerca dei valori massimi (o minimi) di una funzione in un determinato insieme alla soluzione del problema della ricerca degli zeri di determinate funzioni che si sanno calcolare e che oggi vengono chiamate "derivate" delle funzioni considerate. È da osservarsi, tuttavia, anzitutto che l'applicazione di questo metodo può avvenire soltanto nel caso in cui tali funzioni derivate esistano; nel periodo storico in cui il nuovo genere di calcolo veniva creato, gli esempi di funzione sui quali i pionieri lavoravano non offrivano casi di eccezione; tuttavia, la critica del secolo XIX mise in evidenza il fatto che l'esistenza di una funzione derivata non è per nulla garantita in ogni caso, e quindi deve essere esplicitamente dimostrata o postulata quando si vogliano svolgere dei ragionamenti rigorosi.

Tralasciando per il momento i problemi che sorgono dalla non esistenza di funzioni derivate, osserviamo che le procedure classiche si avvalgono di procedimenti di trasformazione dei problemi di ricerca di massimi o minimi; tali trasformazioni si ottengono mediante i procedimenti che la geometria greca chiamava di analisi, cioè di deduzione; ed è chiaro che la deduzione mette in luce soltanto le condizioni necessarie perché un dato problema possa essere risolto. Le condizioni sufficienti debbono essere stabilite con il procedimento inverso (che la geometria greca chiamava di sintesi) e che si potrebbe genericamente chiamare con il termine oggi più abituale di discussione; riteniamo infatti che le espressioni pseudo inglesi "top-down" e "bottom-up", oggi talvolta utilizzate da chi indulge alle mode di linguaggi esotici, o ignora che la logica era coltivata anche molto tempo fa, non dicano di più dei termini classici.

2 - Per precisare ulteriormente ciò che intendiamo dire, analizziamo un esempio del tutto elementare. Si consideri la funzione

$$(1)\quad f(x) = x^5 - x^3$$

nell'intervallo definito dalle relazioni:

$$(2)\ -2 < x < 2\ .$$

Indichiamo con $Df(x)$ la funzione derivata della (l); considerazioni elementari di Analisi matematica conducono a scrivere:

$$(3)\ Df(x) = 5x^4 - 3x^2 .$$

Questa funzione ha tre radici, nell'intervallo (2), e precisamente:

$$(4)\ x = 0\ (doppia),\ x = -\sqrt{0.6}\,,\ x = +\sqrt{0.6}\,.$$

Come abbiamo detto, tra questi valori di x vanno ricercati quelli che corrispondono a massimi o minimi locali della funzione *f*; una discussione ulteriore porta a concludere che la prima delle radici (4) non corrisponde ad un valore massimo oppure minimo della funzione: infatti essa corrisponde ad un punto, chiamato "flesso" della curva che fornisce la rappresentazione grafica della funzione stessa, fatta con i metodi della geometria analitica (si veda la figura); il secondo dei valori (4) corrisponde ad un massimo locale della funzione, che assume ivi il valore:

$$(5)\ f(-\sqrt{0.6}) = 0.24\sqrt{0.6};$$

ed infine al terzo di tali valori corrisponde un minimo locale per la funzione, che assume ivi il valore opposto di quello dato dalla (5): $f\left(\sqrt{0.6}\right) = -0.24\sqrt{0.6}$ (vedere fig. 1, 2).

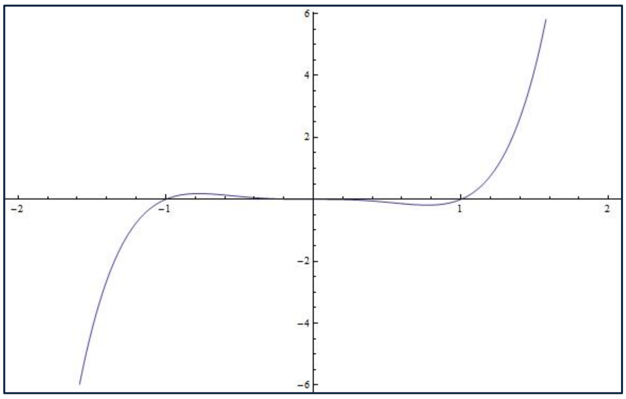


Figura 1: f(x) = x^5 – x^3

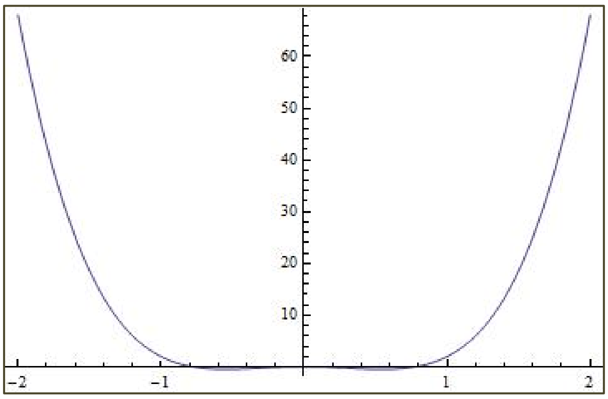


Figura 2: f(x) = 5x^4 - 3x^2

Va osservato ancora una volta che né il valor massimo (5) né il minimo sono il più grande o il più piccolo tra i valori assunti dalla funzione nell'insieme (2), dove infatti la funzione assume dei valori maggiori di quello dato dalla (5), o minori del suo opposto, ma non esiste né il massimo né il minimo tra i valori assunti dalla funzione nell'insieme (2).

È noto che, se invece di considerare la funzione nell'insieme (2), la considerassimo nell'insieme definito dalle relazioni:

$$(6)\ -2 \leq x \leq 2,$$

allora esisterebbero un minimo ed un massimo tra i valori della funzione, corrispondenti rispettivamente all'estremo sinistro e all'estremo destro dell'intervallo (6); tuttavia, tali valori non ci sarebbero forniti dalle procedure classiche, legate al calcolo della funzione derivata ed alla ricerca delle radici di quest'ultima: procedure che tuttavia sempre ci fornirebbero i massimi ed i minimi locali, che abbiamo già trovato sopra.

3 - Le procedure classiche per la ricerca dei valori massimi o minimi locali delle funzioni si estendono, come è noto, anche alle funzioni di più variabili; ed anche a queste si applicano le osservazioni che abbiamo visto sopra, e che qui non ripetiamo, limitandoci a considerare alcuni esempi caratteristici. Si consideri, per esempio, la funzione delle due·variabili *x, y* data dalla:

$$(1)\ f(x, y) = 5x^2 - 2x\,y + y^2 - 18\,x + 2y\ .$$

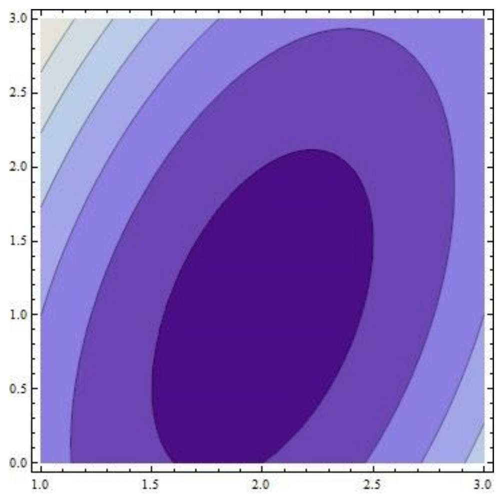
La ricerca di un massimo o di un minimo locale della (1) conduce al calcolo delle funzioni chiamate "derivate parziali" rispetto a ciascuna delle variabili, ed alla soluzione del sistema di equazioni che si ottengono uguagliando a zero tali derivate. Il problema. della ricerca dei valori massimi o minimi locali viene così ricondotto a quello della soluzione di un sistema di equazioni; nel caso in esame tale sistema è:

$$(2)\ 5x - y - 9 = -x + y + 1 = 0,$$

ed ha come soluzioni:

$$(3)\ x = 2,\ \ y = 1.$$

Pertanto il punto che ha queste coordinate può essere soluzione del problema relativo alla funzione (l); una successiva analisi conduce ad accertare che il valore della funzione corrispondente ai valori (3) delle variabili è·effettivamente un minimo locale della funzione (vedere ad esempio l'andamento delle curve di livello).



Curve di livello vicino al punto 2, 1.

Non indugiamo oltre a presentare procedure e metodi che sono ben noti a chi conosca gli elementi dell'Analisi matematica; ci limitiamo ad osservare qui che, come è noto, nel caso di più variabili la discussione può mettere in luce una circostanza che non si verifica nel caso di una sola variabile: si tratta della presenza di quelli che vengono chiamati "punti di sella" delle funzioni. Un punto cosiffatto potrebbe essere descritto in modo suggestivo, anche se poco rigoroso, richiamando l'immagine di un colle (o passo o sella) di una catena di montagne, colle che mette in comunicazione due valli contigue; orbene, è chiaro che il colle risulta essere il punto di massima altezza per il cammino che mette in comunicazione una valle con l'altra, ma risulta essere il punto di minima altezza per l'alpinista, che cammina lungo la cresta della catena di montagne. L'esempio seguente potrà ulteriormente chiarire ciò che diciamo. Si consideri per ogni coppia di valori *x, y*, la funzione:

$$(4)\ f(x, y) = x^3 - 3x + y^3.$$

Per *y* = 0 l'andamento della funzione è dato dalla fig. 3.

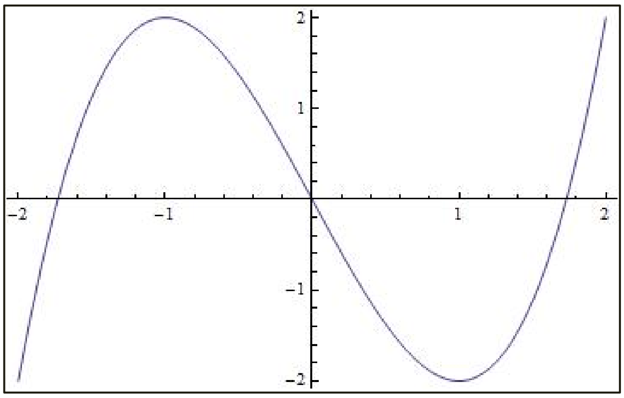


Figura 3

Una breve discussione permette di concludere che i valori:

$$(5)\ x = 1,\ x = -1$$

sono rispettivamente un minimo ed un massimo per la funzione *f (x, 0).* Si verifica anche che il punto di coordinate:

$$(6)\ x = 1,\ y = 0$$

è un minimo locale per la funzione (4); infatti, quando il punto di coordinate *x, y* si allontana da esso, il valore della funzione *f* cresce, quale che sia la direzione di allontanamento. Invece il punto di coordinate:

$$(7)\ \ x = -1,\ y = 0$$

corrisponde ad un punto di sella della funzione (4). Infatti, ivi la funzione prende il valore 2; quando ci si allontani nella direzione dell'asse delle *x*, rimanendo abbastanza vicini, il valore della funzione diminuisce; quando, invece, ci si allontani nella direzione dell'asse delle *y* il valore della funzione cresce (figura 4).

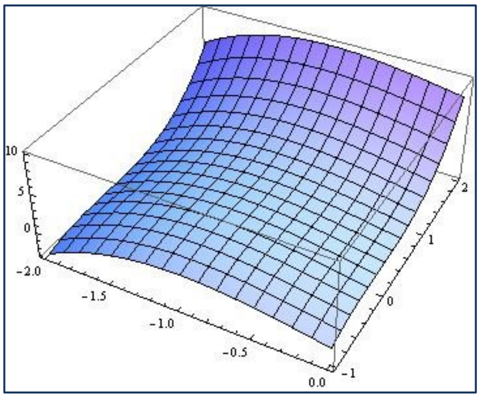


Figura 4. Punto di sella in -1, 0

Il concetto di punto di sella di una funzione viene utilizzato in vari campi della matematica pura ed applicata; nella Scheda N.8 presenteremo alcuni esempi di applicazione di questo concetto alle moderne teorie che analizzano il comportamento economico dell'uomo.

4 - Le considerazioni svolte poco sopra possono essere generalizzate in varie direzioni; ci limiteremo qui a far cenno della soluzione data dal LAGRANGE al problema che viene abitualmente chiamato dei "massimi o minimi condizionati": si tratta della ricerca di valori ottimali di funzioni di più variabili, quando queste ultime non siano libere, bensì sottoposte ad un certo numero di legami o condizioni. Come abbiamo già fatto, ci limiteremo ad esporre qui un esempio che ci sembra caratteristico e che tratta di un problema di Economia.

Si consideri un processo di produzione di un bene, processo nel quale si utilizzano due fattori, le cui quantità (positive, ovviamente) verranno indicate con *x* ed *y*; per esempio, nelle trattazioni classiche, i due fattori produttivi vengono identificati con il capitale e con il lavoro.

Si supponga che la quantità Q di bene prodotto si possa esprimere mediante x ed y con una formula del tipo:

$$(1)\ Q = x^{\alpha} y^{\beta}, \text{ con}$$

$$(2)\ \alpha,\ \beta > 0\ \ ;\ \ \alpha + \beta = 1;\ \ x, y > 0.$$

Indicando con p e q rispettivamente i prezzi dei due fattori produttivi, nell'ipotesi che si voglia produrre una data quantità Q del bene considerato, il produttore è condotto a ricercare il minimo della funzione:

$$(3)\ f(x, y) = px + qy,$$

che esprime il costo totale della produzione, sotto la condizione (l) che lega le quantità x ed y.

La geniale procedura escogitata da Lagrange per risolvere il problema proposto conduce a costruire una nuova. funzione:

$$(4)\ F(x, y) = px + qy + u\ (Q - x^{\alpha} y^{\beta})$$

nella quale compare un "moltiplicatore indeterminato" u: il problema si risolve cercando le condizioni necessarie perché la (4) abbia soluzioni, e quindi risolvendo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite *x, y, u* dato dalla (1) e dalle due derivate parziali della F uguagliate a zero, cioè dalle:

$$(5)\ p - \alpha\, u\, x^{\alpha-1} y^{\beta} = 0 \qquad , \qquad q - \beta\, u\, x^{\alpha} y^{\beta-1} = 0.$$

5 - Non intendiamo proseguire nella presentazione di teorie o di procedure che fanno parte delle conoscenze di Analisi matematica elementare. Cogliamo tuttavia l'occasione per osservare che i moderni strumenti di calcolo e di elaborazione dell'informazione permettono di percorrere per così dire in senso inverso la strada classica, la quale, come si è visto, riconduce la ricerca di valori massimi o minimi di una funzione (sotto certe condizioni cui abbiamo accennato) alla soluzione di sistemi di equazioni. Infatti, possedendo degli strumenti di calcolo abbastanza potenti è possibile cercare dei valori approssimati delle soluzioni di un sistema di equazioni attraverso la ricerca di valori minimi di certe funzioni. Per chiarire con un esempio il nostro discorso, consideriamo il sistema di equazioni 3(2), che qui riscriviamo:

$$(1)\ 5\,x - y - 9 = -x + y + 1 = 0.$$

È noto che l'algebra elementare insegna le procedure per giungere alla soluzione; tuttavia lo stesso scopo potrebbe essere conseguito ricercando il minimo dei valori della funzione di due variabili:

$$(2)\ f(x, y) = (5x - y - 9)^2 + (-x + y + 1)^2;$$

lo scopo potrebbe essere conseguito programmando opportunamente una ricerca "a caso" nel piano, ricerca che potrebbe essere sommariamente descritta nel modo seguente: si scelga un punto di partenza, per esempio l'origine delle coordinate, e si consideri un piccolo quadrato *(Q)* che abbia il suo centro in tale punto; si facciano poi scegliere al calcolatore dei punti a caso nel quadrato, si faccia calcolare in ognuno di essi il valore della funzione f data dalla (2). Non appena si incontra un punto in cui il valore della funzione è minore di quello che si ha nel punto di partenza si trasporti in esso il centro del quadrato e si ricominci la procedura. Questa sarà interrotta quando il valore della funzione f sia abbastanza piccolo da garantire che si è giunti abbastanza vicino alla soluzione del sistema (1).

È chiaro che una procedura cosiffatta è applicabile soltanto quando si disponga di apparecchiature che permettano di eseguire rapidamente moltissimi calcoli, tra cui quelli che conducono alla scelta casuale di valori numerici. Essa è chiaramente inferiore a quella classica nel caso di sistemi semplici come quello da noi dato in (1); ma può rivelarsi, invece, proficua quando si tratti di molte equazioni, i cui coefficienti sono valori approssimati di grandezze, ottenuti mediante misure. Inoltre tale procedura è applicabile anche quando la funzione di cui si ricerca il valore minimo non ammette funzioni derivate parziali proprio nel punto che si cerca; tale è per esempio la funzione:

$$(3)\ F(x, y) = |5x - y - 9| + |-x + y + 1|.$$

SCHEDA N. 5

UN ESEMPIO DI PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

(L'esempio è tratto dal delizioso film Linear programming di JOY BATCHELOR e JOHN HALAS (Educational Film Centre Limited. London) che potrebbe essere un utile avvio al discorso sulla programmazione lineare).

Un operatore vuole caricare sul suo carretto delle scatole di due tipi in modo da rendere massimo il ricavo, rispettando i vincoli di portata e di capacità del carretto. I dati sono i seguenti:

SCATOLE	PESO UNITARIO	VOLUME UNITARIO	COSTO UNITARIO
Blu	25 Kg	2 dm^3	500 Lire
Rosse	8 Kg	6 dm^3	600 Lire

Il carretto ha la portata di1200 kg e la capacità di 216 dm^3.

Si tratta quindi di cercare il massimo di $500\,x + 600\,y$, con le condizioni, relative rispettivamente alla portata e alla capacità, espresse dalle disequazioni $25\,x + 8y \le 1200$; $2x + 6y \le 216$, cioè $x + 3y \le 108$, con x e y interi non negativi.

Si trova che la soluzione a numeri interi è $x = 40$, $y = 22$, non appartenente alla frontiera della regione ammissibile, con conseguente ricavo massimo di lire 33.200 = 40 · 500 + 22 · 600.

Si noti che è 1000 + 176 = 1176 < 1200, 40 + 66 = 106 < 108. La rappresentazione grafica è riportata nelle fig. 1, 2.

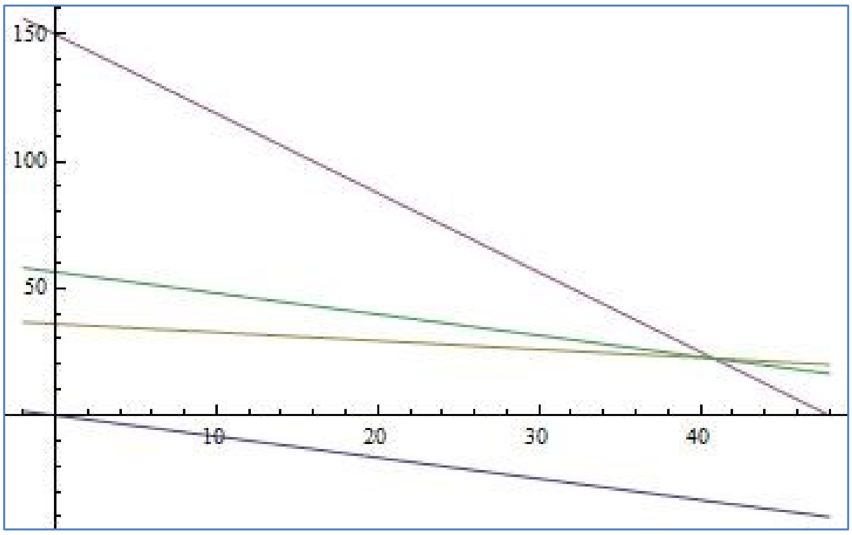


Figura 1. 25x + 8y = 1200, x + 3y = 108, 5x + 6y = 0. Le prime due rette si incontrano nel punto di coordinate x = 40.8358.., y = 22.3881…

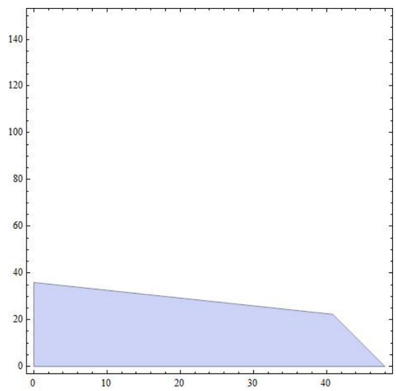


Figura 2 Regione ammissibile.

È importante osservare che sono implicite tre ipotesi:

1) che ci sia un numero sufficiente di scatole dei due tipi;

2) che non sia importante la situazione che si lascia;

3) che l'attenzione sia fissata sul singolo carico.

Lasciando al lettore le considerazioni sulla prima ipotesi, ci limitiamo a osservare che se si avessero, ad esempio, 60 scatole blu e 52 scatole rosse avrebbe senso ottimizzare il numero dei viaggi, limitandoli a due, ad esempio con carichi eguali rispettivamente di 30 e 26 scatole, che rispettano i vincoli (essendo 750 + 208 = 958, 30 + 78 = 108), con il ricavo di 30.600 (= 30 · 500 + 26 · 60).

Si noti che facendo il primo viaggio nel modo che ottimizza il ricavo rimarrebbero 20 scatole blu e 30 scatole rosse e il secondo vincolo non potrebbe essere rispettato, essendo 20 + 30 · 3 = 110.

SCHEDA N. 6

Tema di maturità tecnica commerciale. Indirizzo: Programmatori – a. s. 1987-1988.

Il tema è stato svolto e commentato da CARLO FELICE MANARA nel numero 7 (marzo 1989), p. 65-69, di Nuova Secondaria: *Matematica - esami di maturità*.

Il candidato risolva due dei seguenti quesiti.

1. Sono stati rilevati i seguenti dati relativamente alla domanda e all'offerta di un certo bene:

Prezzo L.	Domanda nr. Pezzi	Offerta nr. pezzi
1000	600	415
1100	580	460
1200	550	500
1300	510	520
1400	490	560
1500	440	600
1600	400	630

Nell'ipotesi che la funzione rappresentativa della domanda sia del tipo $y = a + b/x$, e quella dell'offerta sia invece del tipo $y = a + b\,x$,

a) determinare tali funzioni e rappresentarle graficamente;

b) determinare il prezzo di equilibrio.

2. Un'industria produce un certo bene impiegando due fattori produttivi *R* e *S*, il cui costo per unità di prodotto è rispettivamente di lire 10 e di lire 25.

Si sa inoltre che lo quantità q di bene prodotta è legata alla quantità *x* di *R* e *y* di *S* dalla funzione $q = 6\,x\,y$.

Determinare la combinazione di costo minimo per produrre 60 unità. Studiare inoltre la funzione obiettivo mediante le sue linee di livello nel piano *Oxy* e la funzione vincolo.

3. Una industria produce due tipi di pezzi lavorati costituiti dalla stessa quantità e qualità di materia, ma con diversi processi di lavorazione che impiegano tre macchine *A, B, C*. Lo schema del lavoro è:

	prodotto P1	prodotto P2
Ore macchina A	2	1
Ore macchina B	3	2
Ore macchina C	1	3

Le ore di lavoro macchina disponibili giornalmente sono: 8 per *A*, 24 per *B*, 18 per *C*. Il guadagno unitario è di lire 4 per i pezzi del primo tipo e di lire 3 per i pezzi del secondo tipo.

Si vuole programmare la quantità dei pezzi dei due tipi che occorre produrre giornalmente per ottenere il massimo guadagno.

4. Una impresa industriale impiega con consumo uniforme nel tempo, nella sua produzione, una certa materia prima. Formulare e risolvere il modello matematico delle due seguenti situazioni:

a) Il consumo di materia prima è di quintali 80 al giorno, il costo fisso di ogni ordinazione è di Lire 40000, il costo di magazzinaggio è di lire 10 per ogni quintale al giorno. Determinare la quantità di merce da ordinare volta per volta per avere il minimo costo annuo di gestione delle scorte.

b) Ai dati della precedente situazione si aggiunge il vincolo dato dalla capacità di magazzino che non può essere superiore a quintali 700. Evidenziare, con una breve trattazione teorica, la differenza tra le due situazioni.

SCHEDA N. 7

OTTIMIZZAZIONE IN ECONOMIA.

1 - Abbiamo visto (vedere Scheda N. 4) che i metodi dell'Analisi matematica permettono di ricondurre la ricerca di massimi e minimi di certe funzioni alla soluzione di equazioni o di sistemi di equazioni: abbiamo anche visto che problemi più complicati di ricerca di massimi o minimi, coinvolgenti valori costruiti sul comportamento globale di certe funzioni vengono ricondotti alla soluzione di equazioni differenziali o di sistemi di equazioni cosiffatte. Abbiamo osservato che queste riduzioni conducono a condizioni soltanto necessarie per la esistenza di soluzioni, come avviene quando in matematica si applica il procedimento di analisi, cioè la deduzione. Inoltre, gli esempi trattati ci hanno offerto l'occasione di osservare che i procedimenti adottati sono applicabili soltanto nei casi in cui esistano certe funzioni (le derivate, se si tratta di una funzione di una variabile, le derivate parziali, se si tratta di funzioni di più variabili). Infine, sempre dagli esempi trattati, si deduce che le procedure classiche dell'Analisi matematica non si applicano alla ricerca di valori ottimali (o di funzioni ottimali) che sono alla frontiera degli insiemi in cui le funzioni sono considerate.
Accade che spesso occorra proprio prendere in considerazione dei valori, o in generale delle situazioni, che possono essere dette di frontiera: ciò avviene per esempio nella tecnica, per indagare le situazioni estreme della resistenza dei materiali, oppure in Economia, per indagare situazioni di saturazione oppure di esaurimento di certi beni. Gli esempi si potrebbero moltiplicare, mettendo in evidenza l'utilità e l'opportunità di escogitare degli strumenti concettuali per poter dominare anche situazioni di questo tipo. Illustreremo qui di seguito il caso delle procedure che conducono alle condizioni di KUHN e TUCKER, per la formulazione di condizioni necessarie alla esistenza di massimi o minimi di frontiera per le funzioni. Poiché le condizioni stesse conducono alla scrittura di relazioni non semplici, ci limiteremo a dare una illustrazione geometrica di alcuni esempi tipici.
Nel piano riferito a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali *x, y* si consideri la funzione

(1) $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$, essendo *r* una costante assegnata.

Dagli elementi di geometria analitica si sa che l'equazione:

(2) $g(x,y) = 0$

rappresenta una circonferenza, avente come centro l'origine degli assi e come raggio *r*; la condizione:

(3) $g(x,y) < 0$

rappresenta l'insieme di punti del piano che sono interni alla circonferenza (con esclusione dei punti di questa); infine la condizione

(4) $g(x,y) \leq 0$

rappresenta il cerchio avente centro nell'origine e raggio *r*, cioè l'insieme che risulta dalla riunione dei punti della circonferenza e dei punti interni.
Si consideri ora la funzione di due variabili:

(5) $f(x,y) = px + qy$,

dove *p* e *q* sono due costanti positive, soddisfacenti cioè alle condizioni:

(6) $p, q > 0$;

per fissare le idee possiamo prendere per esempio:

(7) $p = 1, q = 2$.

Le derivate parziali della funzione (5) sono rispettivamente p e q, e quindi non possono essere nulle in alcun punto del piano; pertanto la funzione (5) non ha alcun punto di massimo o di minimo che appartenga all'insieme (3), cioè sia interno al cerchio. Essa possiede tuttavia un punto di massimo che appartiene all'insieme (4) e che appartiene alla circonferenza (2), che è la frontiera del cerchio. Le condizioni di KUHN e TUCKER, di cui abbiamo detto, permettono appunto di caratterizzare tale punto; noi daremo qui una illustrazione geometrica di tale caratterizzazione.

A tale·scopo si consideri il vettore gradiente della funzione (l), che ha come componenti le derivate parziali della funzione; nel caso in esame, quindi, esso ha come componenti rispettivamente:

$$(8)\ 2x, 2y.$$

In forma suggestiva, anche se poco precisa, si potrebbe dire che il vettore gradiente fornisce la direzione lungo la quale la funzione cresce più rapidamente, in corrispondenza ad un certo spostamento del punto. Abbiamo visto che tale funzione, attraverso la diseguaglianza (3) e la relazione (4), caratterizza l'insieme nel quale la funzione viene considerata. Supporremo che il segno della funzione (1) sia stato scelto in modo che il vettore gradiente sia sempre orientato verso l'esterno di questo insieme.

Si consideri poi il gradiente della funzione (5); esso ha come componenti i numeri p e q. Orbene l'interpretazione geometrica delle condizioni di KUHN e TUCKER potrebbe essere data dicendo che il punto di massimo della funzione (5) nell'insieme (4) si deve trovare in un punto della frontiera di quest'ultimo, nel quale i due vettori gradienti sono paralleli tra loro ed hanno lo stesso verso. In altre parole, deve esistere una costante positiva k tale che si abbia:

$$(9)\ x = kp,\ \ y = k\, q;$$

si trae di qui, con calcoli elementari, che il punto di massimo per la funzione (5) nell'insieme (4) è il punto della circonferenza (2) (frontiera dell'insieme) che ha coordinate:

$$(10)\ x = rp/(p^2 + q^2)\ ;\ y = rq/(p^2 + q^2)\ .$$

Questo punto non appartiene all'insieme (3), ma, come si è detto, alla circonferenza che ne è la frontiera; si verifica che il valore assunto ivi dalla funzione (5) è maggiore di ogni altro valore che essa assume nell'insieme (4).

2 - La procedura illustrata poco sopra può essere generalizzata, ed applicata ad un vasto insieme di problemi teorici e pratici che usualmente vengono classificati come problemi di "programmazione lineare"; questi di presentano in molte situazioni della tecnica e dell'Economia, e potrebbero essere descritti in modo sommario dicendo che si tratta di problemi che conducono alla ricerca di valori ottimali (massimi o minimi a seconda dei casi) di certe funzioni lineari, le cui variabili sono sottoposte a vincoli espressi da diseguaglianze pure di primo grado (l'aggettivo "lineare" è spiegato dal fatto che le funzioni di primo grado sono abitualmente chiamate "funzioni lineari").

Si verifica facilmente che i problemi di ottimizzazione, in questo ambito, non sono risolubili con le procedure classiche dell'Analisi matematica: infatti le funzioni di primo grado in più variabili (funzioni che chiameremo "lineari", secondo l'uso) hanno derivate costanti; pertanto queste non si annullano in alcun punto dell'insieme in cui le funzioni stesse sono considerate. Tuttavia, può avvenire che tali funzioni posseggano dei valori ottimali (massimi o minimi a seconda dei casi e dei problemi), i quali appartengono necessariamente alla frontiera degli insiemi nei quali le funzioni stesse sono considerate. Non è possibile sviluppare qui le teoria della ricerca di tali punti di massimo o di minimo; pertanto, ci limitiamo qui a trattare un esempio caratteristico, nel quale si presenterà una generalizzazione della interpretazione geometrica delle condizioni di KUHN e TUCKER.

Si consideri la funzione di due variabili *x, y* data da:

$$(1) f\ (x, y) = x + 2y$$

nell'insieme di punti nel piano determinato dalle condizioni:

$$(2)\ -x \leq 0\ ; -y \leq 0\ ; 3x + y - 3 \leq 0\ ; x + 3y - 3 \leq 0.$$

Le condizioni definiscono nel piano un poligono convesso (cfr. fig. 1) il quale ha 4 vertici nei punti di coordinate:

$$(3)\ x = 0, y = 0;\ x = 1, y = 0;\ x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{4};\ x = 0, y = 1.$$

La frontiera dell'insieme definito dalle condizioni (2) è costituita da 4 segmenti, che appartengono rispettivamente a una delle rette rappresentate dalle equazioni:

$$(4)\ \ x = 0;\ y = 0;\ 3x + y - 3 = 0;\ x + 3y - 3 = 0.$$

Si considerino ora le due ultime condizioni (2); ponendo:

$$(5)\quad g\,(x,y) = 3x + y - 3;\; h(x,y) = x + 3y - 3,$$

queste condizioni possono essere simbolizzate con le relazioni:

$$(6)\quad g(x,y) \le 0,\; h(x,y) \le 0.$$

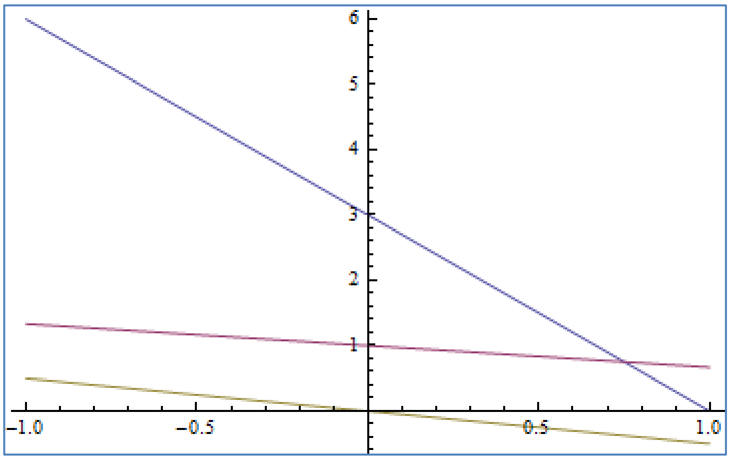


Figura 1

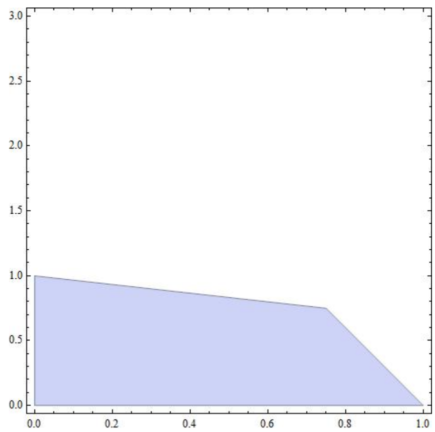


Figura 2 Regione ammissibile

I gradienti delle funzioni (6) sono vettori aventi rispettivamente le seguenti componenti:

$$(7)\quad (3, 1) \text{ e } (1, 3);$$

per il modo in cui sono state scritte le relazioni (2), che definiscono l'insieme in cui la funzione (1) viene considerata, tali vettori sono diretti verso l'esterno dell'insieme stesso.

Le condizioni di KUHN e TUCKER possono essere interpretate geometricamente dicendo che il massimo della funzione (1) viene assunto dalla frontiera dell'insieme definito dalla (2), e precisamente in un punto tale che ivi il gradiente della funzione possa essere espresso come combinazione lineare, a coefficienti positivi, del gradiente o dei gradienti delle funzioni (6), che entrano nelle (2) per definire l'insieme in cui la funzione viene considerata.

Nel nostro caso tali condizioni sono verificate per:

$$(8)\quad x = y = \tfrac{3}{4};$$

in questo punto il gradiente della funzione (l) può essere espresso come somma dei due gradienti (7) moltiplicati rispettivamente per i coefficienti positivi 1/8 e 5/8.

4 - La procedura esposta nell'ultimo paragrafo costituisce un'ovvia generalizzazione di quella esposta nel paragrafo 2. Queste procedure possono essere estese anche a casi più generali, su cui non intendiamo soffermarci qui; ci limitiamo ad

osservare che esse sono radicalmente diverse da quelle classiche, e trovano applicazioni importanti e numerose in molti problemi della tecnica e della ricerca operativa. Occorre, tuttavia, osservare che l'applicazione pratica di queste idee relativamente nuove è resa possibile dall'esistenza dei moderni mezzi di calcolo; pertanto, si può dire che il progresso della tecnica ha reso possibile anche il progresso teorico, rinnovando un fenomeno che non è nuovo nella storia della scienza.

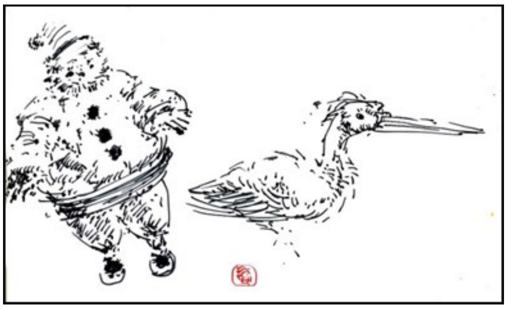
SCHEDA N. 8

OTTIMIZZAZIONE NELLA TEORIA DEI GIOCHI

1 - Abbiamo visto (vedere Scheda N. 4) che le procedure matematiche per la ricerca di valori massimi (o minimi) possono essere utilizzate in Economia, per tradurre dei problemi del comportamento umano nei riguardi dei beni materiali. L'esempio presentato nella Scheda citata si riferiva alla ricerca di una situazione ottimale per un produttore, situazione che quindi richiedeva una procedura di ricerca dei costi minimi sotto determinate condizioni. Abbiamo anche detto che una applicazione classica di queste procedure all'analisi del comportamento umano è quella fatta da V. PARETO, il quale schematizzò il comportamento del consumatore con la ricerca del massimo di una determinata funzione di più variabili quando queste ultime sono sottoposte ad un legame, che traduce la limitazione di bilancio del consumatore stesso.

Vogliamo ricordare che la trattazione di PARETO si fonda su certe ipotesi che non sempre sono completamente rispettate nella realtà dei sistemi economici. Ciò avviene, si può dire, quasi ogni volta che gli schemi matematici sono adottati per descrivere e studiare delle situazioni concrete: in questi casi, infatti, è necessario formulare delle ipotesi di partenza, ipotesi che si basano su convinzioni dello studioso che le formula, oppure su osservazioni generiche riguardanti la struttura della realtà che si vuole studiare; tuttavia ogni ricercatore è ben conscio del fatto che le ipotesi formulate non pretendono di rendere perfettamente tutti gli aspetti della realtà che si vuole studiare. Nel caso dei sistemi economici, una tra queste ipotesi enuncia che i prezzi dei beni ricercati dal consumatore sono dei dati dipendenti soltanto dal sistema economico considerato ma non dal comportamento del singolo consumatore. Tale ipotesi può rispondere abbastanza bene alla realtà dei fatti economici se si vuole studiare il problema classico del consumatore singolo, che acquista dei beni per consumarli personalmente; ma può avvenire che occorra studiare il comportamento economico di soggetti talmente potenti da influire sui prezzi dei beni del mercato; in queste ed in altre situazioni il comportamento del soggetto economico assume gli aspetti di una vera e propria competizione, alla ricerca di scopi che sono spesso ben diversi da quelli a cui mira il consumatore singolo, considerato dalla teoria classica paretiana.

Problemi di questo tipo hanno dato origini alla teoria dei giochi e delle strategie, che è nata per opera di J. von NEUMANN e G. MORGENSTERN e si è sviluppata in varie direzioni, trovando applicazioni anche militari e non soltanto economiche. Daremo qui qualche esempio del tutto elementare di queste teorie, le quali molto spesso utilizzano il concetto di “punto di sella” di una funzione di più variabili, di cui abbiamo detto nella Scheda N. 4. Pertanto, anche in questo ordine di idee, le teorie che stiamo presentando percorrono delle strade diverse da quelle battute dai procedimenti classici; tuttavia, anche in queste situazioni, il procedimento matematico mira a schematizzare opportunamente la ricerca di situazioni da considerare per qualche ragione ottimali, da determinati punti di vista, da precisarsi di volta in volta.



A.Mazzotta. ***Gioco a due…***

2 - La situazione schematica più semplice, che viene studiata in teorie come questa, riguarda un gioco tra due soggetti,

chiamiamoli A e B, i quali sono liberi di fare certe scelte, con risultati che sono noti ad entrambi. Prima di proseguire, osserviamo che in questo contesto il termine “gioco” non ha il significato di “divertimento, distrazione”, ma piuttosto quello di “competizione”. Nel caso più semplice, che qui prenderemo in considerazione, le scelte dei due giocatori danno luogo a dei versamenti di denaro che uno dei due fa all’altro, a seconda delle regole che stabiliremo - in queste condizioni si dice che il gioco è “a somma nulla”.

Se supponiamo che ogni giocatore possa fare solo un numero finito di scelte, il gioco tra i due è completamente descritto da una tabella a doppia entrata, che viene chiamata “matrice del gioco”. La matrice possiede un certo numero di righe e di colonne, e questi due numeri non necessariamente sono uguali tra loro. Supponiamo che il giocatore A scelga le colonne della matrice, e il giocatore B scelga le righe: nella tabella, un numero che si trova all’incrocio tra una riga ed una colonna della matrice indica convenzionalmente la somma di denaro (valutata in unità di una determinata moneta, che non occorre precisare) che il giocatore A incassa (*) (e quindi per ipotesi, che il giocatore B versa) se i due fanno le scelte della riga e della colonna che si incontrano nell'elemento della matrice ora considerato. Sia data per esempio la matrice M seguente:

$$M = \begin{matrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & -2 \end{matrix}$$

(sulle righe le scelte di B, sulle colonne quelle di A. Si osservi che i numeri negativi della tabella hanno significato di vincite negative di A, cioè di effettivi versamenti che A fa a B).

Supponiamo ora che il comportamento dei due giocatori sia diretto dal seguente criterio: il giocatore deve fare una scelta tale da avere il massimo del guadagno (o il minimo della perdita) di fronte a qualunque scelta fatta dall'avversario, scelta che egli ignora all'inizio. Quindi, A sceglierà una tra le colonne il cui minimo è il massimo fra i minimi valori delle sue vincite, quale che sia la scelta di B; e quest’ultimo sceglierà, tra le righe, una il cui massimo è il minimo fra i massimi valori delle sue possibili scelte (che sono appunto sulle righe). Guardando alla tabella M, si vede che la scelta di A deve cadere sulla seconda colonna, e la scelta di B deve cadere sulla seconda riga.

La matrice M presenta un *punto di sella* al posto (2, 2), cioè un elemento che è il massimo della riga e il minimo della colonna cui appartiene. Un elemento con questa proprietà è precisamente il minimo fra i massimi delle righe e il massimo fra i minimi delle colonne, e viene chiamato ”valore del gioco”. Nel caso di M il valore del gioco è 0. Il criterio seguito dai giocatori nelle loro scelte viene chiamato “criterio del min-max”. Questo criterio è stato oggetto di discussione, ma viene generalmente adottato nei problemi di scelta che stiamo esponendo.

3 - Nell'esempio precedente la matrice del gioco presenta un punto di sella. Questo fatto permette ai giocatori contendenti di determinare in modo univoco le proprie scelte in base al criterio min-max che abbiamo presentato. Si suole dire che in casi come questi è possibile una "strategia pura" da parte dei giocatori. Tuttavia, non sempre le condizioni della contesa sono del tipo presentato: può avvenire infatti che la matrice del gioco non presenti un punto di sella, e quindi può accadere che non abbia senso una strategia pura, del tipo di quella considerata. Un caso tipico di una situazione cosiffatta è fornito da un noto gioco che viene spesso chiamato "pari e dispari", o con altri nomi. La matrice del gioco è la seguente:

$$\begin{matrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{matrix}$$

(sulle righe le scelte di B, sulle colonne quelle di A).

Le regole di questo gioco potrebbero essere esposte, per esempio, nel modo seguente: ciascuno dei due giocatori, A oppure B, può fare una scelta tra due. Per esempio ciascun giocatore può scegliere (ovviamente all’insaputa dell’altro) bianco o nero; quando le scelte vengono manifestate, se si rivelano concordi vince B, se si rivelano discordi vince A. Si verifica che non esiste un punto di sella per la matrice, e pertanto non si può dare una strategia pura. È possibile, tuttavia, prendere in considerazione un comportamento razionale, che viene chiamato “strategia mista”, e che si riferisce ad un grande numero di partite e regola la frequenza delle scelte di ciascuno dei giocatori in queste condizioni. Indichiamo con p e q le frequenze con cui A sceglie rispettivamente i due colori: si ha ovviamente

$$(1)\ p + q = 1;$$

analogamente indichiamo con p' e q' le frequenze delle scelte di B; si ha anche qui:

$$(2)\ p' + q' = 1.$$

Con facili considerazioni di calcolo delle probabilità si giunge a concludere che la speranza matematica, su un grande numero di partite, è fornita dalla funzione:

$$(3)\ (p - q)(p' - q')\ .$$

È questa una funzione delle quattro variabili p, q, p', q' sotto le condizioni (1) e (2). Essa ha un punto di sella per i valori:·

$$(4)\ p = q = p' = q' = 0.5.$$

Pertanto il comportamento più razionale, in queste condizioni, secondo il criterio del min-max, si può tradurre nella prescrizione di eseguire le scelte di volta in volta in modo casuale (e quindi imprevedibile da parte dell'avversario) ma con l'avvertenza che, sul grande numero, le frequenze delle scelte debbano soddisfare alle (4).

4 - Le idee che abbiamo esposto possono essere generalizzate in varie direzioni; ci limitiamo qui a fare qualche breve e sommario cenno.

Anzitutto, si può passare dal discreto al continuo, sostituendo alla matrice del gioco, che consente un numero finito di scelte da parte di ogni giocatore, una funzione di due variabili continue. In secondo luogo si può ampliare il numero dei giocatori, ammettendo anche l'ipotesi che si possano formare delle coalizioni. Infine, è possibile prendere in considerazione anche una evoluzione nel tempo delle situazioni: si giunge così alla teoria detta “dei giochi differenziali”, che trova anche numerose applicazioni militari. Per esempio per programmare i missili che debbono inseguire degli aerei oppure altri missili. (**)

N.D.R:

(*) Ovviamente la matrice opposta rappresenta i pagamenti di A (incassi di B). Massimo andrà allora sostituito con minimo, e minimo con massimo.

(**) Nel sito
http://matematica.unibocconi.it/
si trovano molti articoli introduttivi alla Teoria dei Giochi.

In Internet è disponibile la Tesi di laurea di Francesca Ferrari: Tesi in Ingegneria dell’Informazione, Università di Padova, anno acc. 2011-12, dal titolo: Introduzione alla teoria dei giochi.

Le idee introduttive vi sono ampiamente spiegate ed esemplificate.

SCHEDA N. 9

SUL PRINCIPIO DI OTTIMALITÀ DI RICHARD BELLMAN

Richard Bellman a pag. 83 del suo libro *Dynamic Programming* [Princeton University Press, Princeton 1957] enuncia il seguente

Principle of optimality:

An optimal policy has the property that whatever the initial state and the initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.

A pag. IX si legge: " The problem is not to be considered solved in the mathematical sense until the structure of the optimal policy is understood."

P. Klee (1920). They 're Biting. Tate Gallery, London

SCHEDA N. 10

\ GALILEI (1564 – 1642)

Il saggiatore

“ La filosofia [*nel senso di “filosofia naturale”, cioè di “scienza della natura”*] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.”

P. Klee. Steps. 1929. Stoccolma, Moderna Museet

ARNALDO MASOTTI

Istituto di Matematica del Politecnico di Milano

Questioni isoperimetriche nella fisica matematica

Conferenza tenuta il 19 dicembre 1952

SUNTO. — *Accennati alcuni problemi isoperimetrici della geometria, della meccanica e dell'analisi, si indicano diversi problemi isoperimetrici della fisica matematica, concernenti grandezze che intervengono in elasticità (rigidità torsionali), acustica (frequenze principali) ed elettricità (capacità elettrostatiche). Ci si sofferma in particolare sulle soluzioni che di questi ultimi problemi diedero recentemente* PÓLYA *e* SZEGÖ.

Risalgono all'antichità greca i problemi isoperimetrici della geometria. Assai più recenti sono i problemi isoperimetrici della fisica matematica. Alcuni di questi, a cui sono associati i nomi di famosi scienziati dei secoli XVII e XVIII, si possono dire da tempo risolti. Altri, affiorati in ricerche dello scorso secolo e dell'attuale, rimasero fino ai nostri giorni allo stato di congetture, a cui dava credibilità, insieme a una argomentazione più o meno stringente, l'autorità di un nome illustre. Negli ultimi decenni anche questi problemi sono stati risolti, e molte interessanti questioni, a essi affini, sono sbocciate. Emerge in ciò il contributo dei professori PÓLYA e SZEGÖ, dalla cui opera specialmente venne spunto e materia alla presente comunicazione (1).

---

(1) Alludo particolarmente a un volume, che corona una serie di precedenti studi degli stessi autori e di altri: G. PÓLYA e G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Annals of Mathematics Studies, n. 27. Princeton University Press, 1951. Di p. XVI-279. — Notizie sulle ricerche di cui tratta quest'opera diede il SZEGÖ nelle comunicazioni: *Principal frequency, torsional rigidity and electrostatic capacity*, al Secondo Congresso Matematico Canadese, Vancouver 1949 (« Proceedings », p. 45-48), e *On certain set functions defined by extremum properties in the theory of functions and in mathematical physics*, al Congresso Internazionale dei Matematici, Cambridge Mass. 1950 (« Proceedings », v. II, p. 253-257).

SCHEDA N. 12

BULLETIN

of the

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Edited by

FELIX BROWDER   WALTER RUDIN

E. H. SPANIER

VOLUME 70

JANUARY to DECEMBER, 1964

Published by the American Mathematical Society

PROVIDENCE, RHODE ISLAND

WHAT THE BEES KNOW AND WHAT THEY DO NOT KNOW

L. FEJES TÓTH

In the first part of this paper we construct a more economical honeycomb than that of the hive bees for any parameters involved in the problem. The second part gives a survey of some further solved and unsolved isoperimetric problems concerning cell-aggregates.

I. **Honeycombs.** The honeycomb of the bees is a loose tissue of wax forming a plane layer. The first things on it which catch one's eye are the regular hexagonal patterns on both sides. The hexagons are the openings of prismatic vessels, called bee-cells. Kepler described the shape of the bee-cells more fully. It turned out that the bottom of a cell consists of three equal rhombi as shown in Figure 1b. Thus the two kinds of cells having their openings in opposite directions are separated by a zigzagged surface and not by a plane, as one would expect at first.

Why do the bees build such a strange conformation?

According to a widely spread hypothesis, going back to Pappus, the bees aim at economy: If, by some reason, the volume of a cell and the width of the whole layer are given, they try to use the minimum amount of wax per cell. Although among the various effects which interact in producing the honeycomb the utilitarian human motive attributed to the bees seems to play the least part, the above hypothesis was the source of highly interesting investigations. Thus we accept this hypothesis and try to point out what the bees do well and what they do not do well from the point of view of making the surface-area of their cells small.

To give the problem a precise formulation we define a *honeycomb* as a set of congruent convex polyhedra, called *cells*, filling the space between two parallel planes without overlapping and without interstices in such a way that

(1) Each cell has a face, called *base* (or *opening*) on one of the two planes but does not have faces on both planes.

(2) In the congruence of two cells their bases correspond to each other.

The distance between the parallel planes is the *width* of the honeycomb.

An address delivered before the Chicago meeting of the Society on April 24, 1964 by invitation of the Committee to Select Hour Speakers for Western Sectional Meetings; received by the editors February 14, 1964.

Let w be the width of a honeycomb, v the volume of one of its cells and a the area of the base of a cell. Consider a large cylindrical section of the honeycomb, the area of a base-circle of which equals A. Since the two base-circles contain approximately $2A/a$ openings, the cylinder contains approximately the same number of cells. Thus the volume Aw of the cylinder equals approximately $2Av/a$. This argument, which can easily be made precise, shows that $wa=2v$. The area a of the openings being uniquely determined by v and w, it is all the same whether, in the following problem, we consider the cells as open vessels, the surface of which consists only of the internal faces, or as closed polyhedra.

We now formulate the

First isoperimetric problem for honeycombs. Among the polyhedra of volume v generating a honeycomb of width w find that one of least surface-area.

Though the solution of this problem is not known as yet, the following considerations will give us useful information.

In the honeycomb of the bees w is large in proportion to $\sqrt[3]{v}$. In such a case it is reasonable to erect right prisms of height $w/2$ on the bases. Something may be gained by a suitable formation of the bottoms, but the solution will depend, above all, on the shape of the base. In this respect the bees make a good choice, because of all convex plane-fillers of given area the regular hexagon has the least perimeter.

Choosing regular hexagonal bases the question of the most economical bottom-figure arises. In the rhombic bottom-figure we have one degree of freedom: we can turn the planes of the rhombi around their "horizontal" diagonals without changing v and w. In which position will the surface-area be minimal? The history of the solution of this famous problem, raised by Réaumur, and the deep impression it made have been described in some books (see e.g. [1]). It turned out that, in close accordance with the shape of the bee-cells, the rhombi must include an angle equal to 120°. Thus if for some reason the bees stick to a rhombic bottom-figure, they do excellent work.

Before proceeding with the case of "deep" cells we make a remark which will give us an orientation in the general case. Let $S(v, w)$ be the surface-area of the best open cell. Since for any fixed value of v, $S(v, w)$ is large for both large and small values of w, there must be an "absolute best" cell giving the solution of the

Second isoperimetric problem for honeycombs. Among the open cells of volume v generating a honeycomb (of any width) find that one of least surface-area.

Is the solution of this problem a bee-cell? The answer is: No.

Two bee-cells can be put together with their openings so as to form a "telescopically elongated" rhombic dodecahedron. It is easy to show that among these solids the rhombic dodecahedron (Figure 1a) is the best from the point of view of the isoperimetric problem, i.e., it yields the minimum of the quotient S^3/V^2, where S and V are the surface-area and the volume of the body. The rhombic dodecahedron represents one type of the so-called parallelohedra, or Fedorovean space-fillers, defined as convex polyhedra whose translated replicas can be put together along whole faces so as to fill the space completely. But we know a better parallelohedron than the rhombic dodecahedron, namely the truncated octahedron. Halving the truncated octahedron by a plane orthogonal to one of its hexagonal zones of faces we obtain a cell generating a honeycomb and it may be conjectured that this cell is the solution of our second problem. Anyway the solution is not a half of a rhombic dodecahedron which is the best cell the bees produce while building their cells. The bees start with the bottom and proceed to build the side walls. But they do not stop at the optimal height, when each cell is the half of a rhombic dodecahedron, but continue building rather deep cells. We suppose that they have good reason to do so. Therefore we return to our first problem in the case of large values of w^3/v.

Also the side walls of a half of a truncated octahedron can be elongated. But having irregular openings these cells cannot compete with those obtained from a rhombic dodecahedron. Yet we can make a trial with a parallelohedron of the type of a truncated octahedron having a regular hexagonal zone of faces.

We elongate the "vertical" diagonal of a regular octahedron symmetrically in both directions so as to obtain an octahedron whose dihedral angles at the horizontal edges are equal to 120°. First we truncate this octahedron by two horizontal planes touching the insphere of the body. The obtained polyhedron is the intersection of two right regular hexagonal prisms. We continue to cut off the remaining corners of the octahedron by planes perpendicular to the corresponding diagonals of the octahedron. Performing this second kind of truncations at a suitable equal depth the hexagonal faces will be centro-symmetric. Since the remaining faces are squares and rhombi all faces will have central symmetry (Figure 2a). Therefore this irregular truncated octahedron is a parallelohedron. It has two squares each of side length, say, s. The eight faces adjacent to the squares are hexagons having two opposite sides of length s at a distance s from one another. The diagonal of a hexagon parallel to these sides

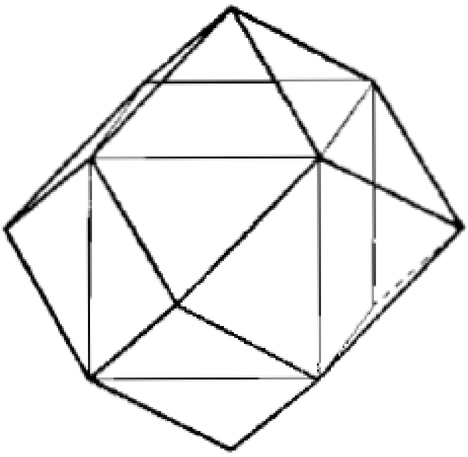


FIGURE 1a

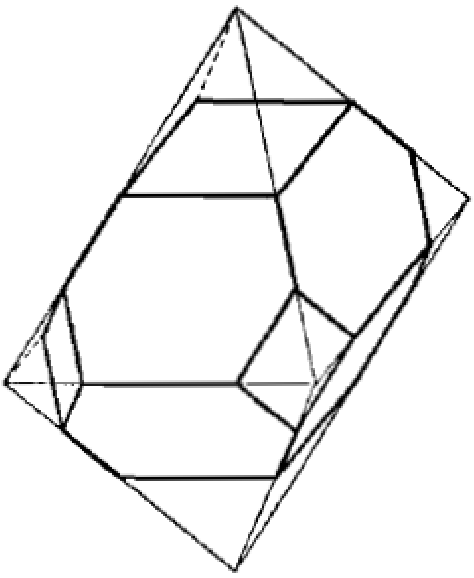


FIGURE 2a

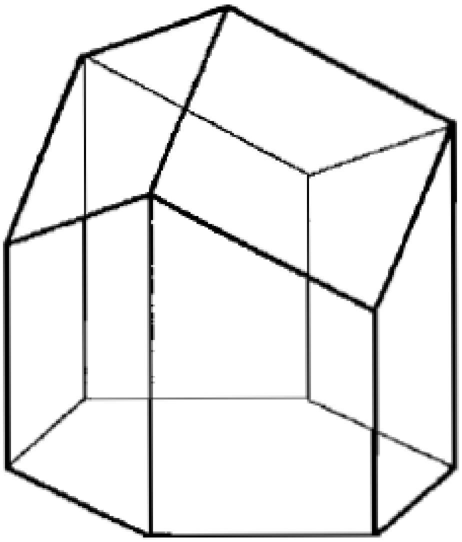


FIGURE 1b

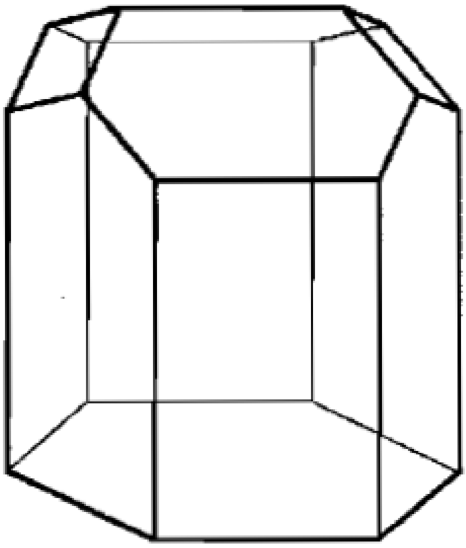


FIGURE 2b

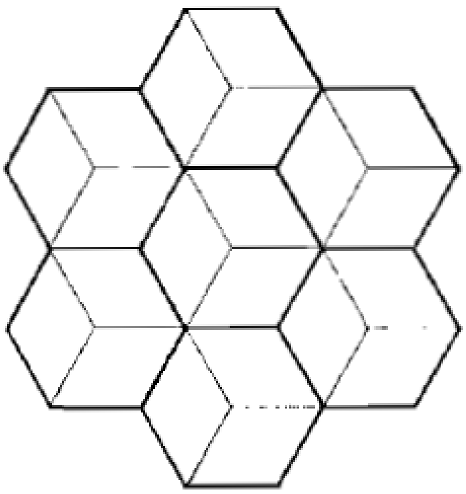


FIGURE 1c

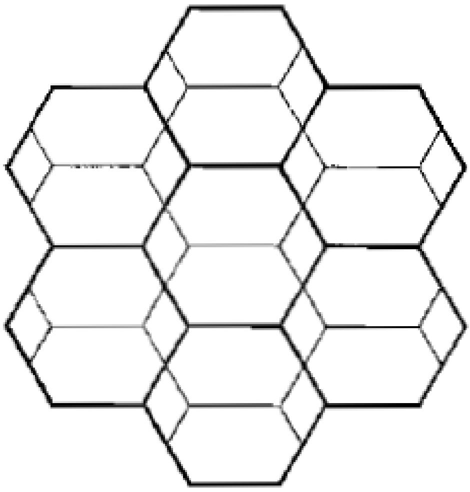


FIGURE 2c

has a length equal to $3s/2$, as can be seen by looking at the polyhedron from the direction of a regular hexagonal zone (Figure 2c). Thus the length of the shorter edges equals

$$\sqrt{\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{s}{4}\right)^2\right)}=\frac{\sqrt{(5)}s}{4}.$$

The polyhedron has four rhombi of side-length $\sqrt{(5)}s/4$ and a diagonal of length $\sqrt{(3)}s/2$. Thus the length of the other diagonal is $\sqrt{(2)}s/2$.

Now we can evaluate the surface-area of our polyhedron:

$$S = 2s^2 + 8\,\frac{5s^2}{4} + 4\,\frac{\sqrt{(6)}s^2}{8} = \frac{24+\sqrt{6}}{2}\,s^2.$$

The volume V of the polyhedron equals the volume of a regular hexagonal prism having an altitude equal to $3s/2$ and edges of length s at the hexagonal faces. Thus $V=9\sqrt{(3)}s^3/4$. (It is interesting to note that in the case of unit volume the surface-area

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\,\frac{24+\sqrt{6}}{3} = 5.340\cdots$$

of our body is less than the surface-area $\sqrt[3]{(108\sqrt{2})}=5.345\cdots$ of the rhombic dodecahedron but greater than the surface-area $\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}(1+\sqrt{12})=5.315\cdots$ of the Archimedean truncated octahedron.)

Letting $s=1$ and elongating our body in the axial direction of one of its regular zones by x we obtain a body of surface-area

$$S_x = \frac{24+\sqrt{6}}{2} + 6x$$

and volume

$$V_x = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,x.$$

We choose x so that V_x equals the volume of a rhombic dodecahedron having a regular hexagonal section of side-length 1:

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,x = 3\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Hence

$$x = x_0 = -\frac{3-\sqrt{8}}{2}$$

showing that the "elongation" is negative. The condition $x > -1$ of performing such a transformation being satisfied we obtain a body of surface-area

$$S_{x_0} = 3 + \frac{12+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 12.71002 \cdots$$

which is less than the surface-area $9\sqrt{2} = 12.7279 \cdots$ of the rhombic dodecahedron.

The two kinds of cells which arise by bisecting the rhombic dodecahedron and our shortened snub octahedron have equal volumes and congruent openings. Thus they generate honeycombs of equal width. But the latter has a smaller surface-area than the first and, obviously, the same holds for any elongations of them. As to negative elongations observe that the first cell (arising from the rhombic dodecahedron) can be shortened at most by $\sqrt{2}/4 = 0.35 \cdots$ while in the case of the second cell (arising from the shortened snub octahedron) we have a wider latitude for shortening it by $1/2-(3-\sqrt{8})/2 = 0.41 \cdots$. Thus, recapitulating our result, we can say: *Instead of closing the bottom of a cell by three rhombi*, as the bees do, *it is always more efficient to use two hexagons and two rhombi.*

We must admit that all this has no practical consequence. By building such cells the bees would save per cell less than 0.35% of the area of an opening (and a much smaller percentage of the surface-area of a cell). On the other hand, the walls of the bee-cells have a non-negligible width which is, in addition, far from being uniform and even the openings of the bee-cells are far from being exactly regular. Under such conditions the above "saving" is quite illusory. Besides, the building style of the bees is definitely simpler than that described above. So we would fail in shaking someone's conviction that the bees have a deep geometrical intuition.

II. **Two-dimensional honeycombs, tessellations, drying mud, wall-systems, cellular tissues, foam.** The definition of a honeycomb can be extended to any dimensions. In a joint paper Bleicher and I [2] have given a complete enumeration of two-dimensional honeycombs. The types of such honeycombs turned out to be rather limited, so that it was not difficult to pick out the solutions of the isoperimetric problems. Depending on the width of the honeycomb and the area of a cell, the best cells are a half of an elongated regular hexagon or an

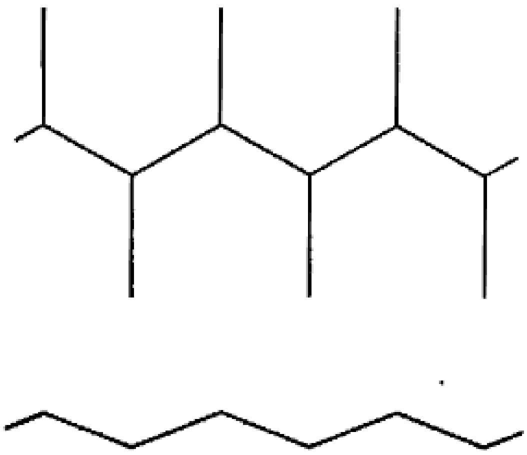


FIGURE 3

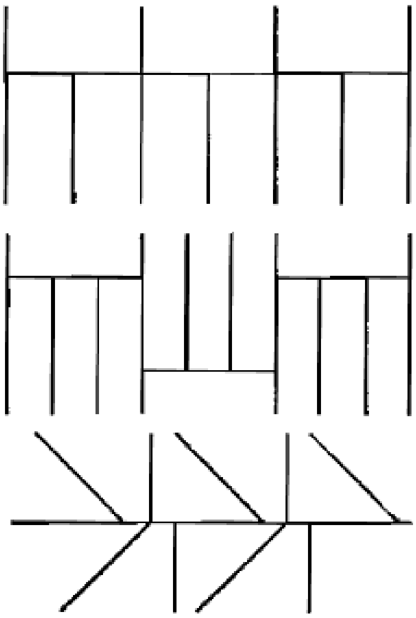


FIGURE 4

isosceles triangle (Figure 3). The absolute best cell is, of course, a half of a regular hexagon.

Let us observe that by dropping the second postulate defining a honeycomb we obtain "unnatural" honeycombs like those exhibited in Figure 4. However, this does not change the solutions of the isoperimetric problems.

What happens if we even drop the congruence of the cells and consider only cells of equal and given area? We can then inquire about the minimum of the average perimeter of the cells defined by a suitable limiting value. For incongruent cells a second problem arises which is the dual counterpart of the first one. We can consider cells of equal and given perimeter and ask about the maximum of the average area of the cells. It would be nice to prove that the solutions are, in both problems, the same as for congruent cells (in which case the two problems are equivalent).

The analogous problems for tessellations are as follows.

(a) Decompose the Euclidean plane into parts of unit area so that the average perimeter of the parts should be as small as possible.

(p) Decompose the Euclidean plane into parts of unit perimeter so that the average area of the parts should be as great as possible.

It is known [3] that under the restriction to convex cells the solution of problem (a) is the regular hexagonal tessellation. There is no doubt that the same is true for general cells. Nevertheless, this conjecture resisted all attempts at proving it. On the other hand, problem (p) is solved in its full generality [**4**]. The solution is again the regular hexagonal tessellation.

These extremal properties of the hexagonal tessellation may be extended to its spherical and hyperbolic analogues, namely to the regular tessellations with trihedral vertices. As to problem (a) we mention the following theorem [**5**].

If U is the union of n cells of a regular (spherical, Euclidean or hyperbolic) tessellation with trihedral vertices then among the decompositions of U into n convex cells of equal area the regular decomposition has the least total edge-length.

The difficulties involved in the problem of generalizing this theorem to nonconvex cells is illustrated by the following interesting remark due to A. Heppes: If n is a positive integer different from 2, 3, 4, 6 and 12 then the shortest net which decomposes the sphere into n parts of equal area necessarily contains a nonconvex mesh.

What is the situation if, e.g., $n=12$? Are all meshes convex? If so then, in view of the above theorem, they must be regular pentagons.

The following theorem [**4**] involves the solution of problem (p).

Let U be the union of n faces of a regular Euclidean or hyperbolic tessellation with trihedral vertices. If we decompose U in any way into n connected parts the perimeter of the part of greatest perimeter attains its minimum for the regular decomposition.

For spherical tessellations this theorem must be modified. If, namely, U consists of the whole sphere no part is allowed to have a greater area than a hemisphere.

In his book *Kaleidoskop der Mathematik* (Berlin, 1959), H. Steinhaus gives a "theory" of the breaking lines arising on a drying table of mud. Similar lines may be seen on potteries covered with special glaze which contracts considerably when drying. We have some reason to suppose that these lines come into being successively so that at each turn one of the parts of greatest area splits along a shortest line into two parts of equal area. What can be said about the total length of the lines after the nth breaking?

Let P_n be the sum of the perimeters of the parts after a decomposition into n parts. It is easy to show that if the original domain is a rectangle of area A, we have

$$4\sqrt{A} \leqq \liminf_{n\to\infty} \frac{P_n}{\sqrt{n}} \leqq 2(2^{1/4}+2^{-1/4})\sqrt{A},$$

$$2(2^{1/4}+2^{-1/4})\sqrt{A} \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{P_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{18}\sqrt{A}.$$

The bound $4\sqrt{A}$ corresponds to the case when the partial domains are squares. Of course, even in this best situation of a successive decomposition the total perimeter is greater than it is in an immediate decomposition into hexagons.

Do these inequalities hold for any domain of area A? Probably, yes. This may be conjectured from the fact that, starting with any domain, for great values of n the bulk of the partial domains will have a nearly rectangular shape.

After this digression we return to problem (a) whose connection with an economical building of a honeycomb consisting of incongruent cells is obvious. We restrict ourselves to convex cells; on the other hand, we want to take into consideration the width of the cell-walls.

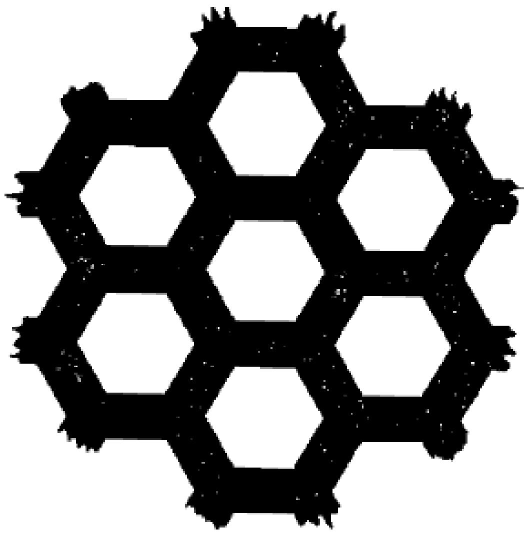


FIGURE 5

We define a *wallwork* as a connected domain bounded by at least two closed curves. Among these curves there is one, the *contour* of the wallwork, which encloses the whole wallwork. The domains enclosed by the remaining curves are called cells. The *width* of the wallwork is the minimal distance between two points belonging to different bounding curves.

Now we want to construct a wallwork of given contour and given width containing as great a number of convex cells of given area as possible. This amounts to making the area of the wallwork small. The following theorem [6] shows that for a "big" contour the solution is a regular hexagonal wallwork (Figure 5).

Consider a wallwork of width $2t$ lying in a convex hexagon of area H. If the wallwork has n convex cells all of area $\geqq h$, then

$$n \leqq \left(\frac{\sqrt{H} - \sqrt[4]{(12)}t}{\sqrt{h} + \sqrt[4]{(12)}t}\right)^2.$$

Here a hexagon means a polygon with at most six sides. Note that $(\sqrt{A} \pm \sqrt[4]{(12)}t)^2$ equals the area of a regular hexagon arising from another one of area A by displacing each side by t outward or inward, respectively.

In certain cellular tissues the cells do not completely fill the available space. The consideration of such tissues leads to new mathematical problems. We consider the tissue as consisting of nonoverlapping plastic cells all contained in a given part of space. Supposing first that the cells have the same constant volume, we can ask what shape and arrangement the cells must assume in order to make their total surface-area as small as possible. Supposing, secondly, that the cells have equal and unchanged surface-area, we can ask in what shape and arrangement the total volume of the cells will be as great as possible.

In the stem of certain plants the cells may be considered as small columns considerably elongated in the axial direction so that their volume and surface-area may be supposed to be proportional to the area and perimeter of their sections. This suggests the following two-dimensional analogues of the above problems.

(A) Consider in the Euclidean plane a set of nonoverlapping discs of unit area having a given number-density. Find the shape and the arrangement of the discs in which their average perimeter attains its minimum.

(P) Consider in the Euclidean plane a set of nonoverlapping discs of unit perimeter having a given number-density. Find the shape and the arrangement of the discs in which their average area attains its maximum.

The *number-density* of a set of discs scattered over the plane is defined by a suitable limiting value and may be interpreted as the number of discs per unit of area. Thus, instead of considering an infinite set of discs of given number-density, we can, roughly speaking, consider a great number of discs lying in a given circle (or in any domain of fixed shape). Obviously, the problems (A) and (P) are generalizations of the problems (a) and (p).

In the case of convex discs problem (P) was solved in a paper of the author [7] and problem (A) in a common paper of the author and Heppes [9]. For small values of the number-density d the extremal discs are circles arranged in an arbitrary way. Increasing d, the circles will get into hexagonal close-packing and we know that, in some

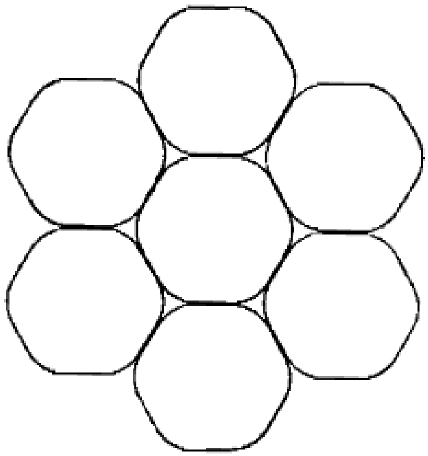


FIGURE 6

way, they must turn into regular hexagons. How does this transition go? The answer is the same in both problems: through *smooth hexagons*, each arising from a regular hexagon by rounding off its corners by equal circular arcs (Figure 6).

Recently, Heppes [10] pointed out that in the case of problem (P) we obtain the same solution without restricting ourselves to convex discs. But in the general case of problem (A) we encounter the same difficulties arising in problem (a).

For convex domains the results mentioned in connection with the problems (a) and (p) may be generalized in another direction. We consider a decomposition of the Euclidean plane into convex cells. Let a be the area and p the perimeter of a cell. Our results [8], [4] concern the mean-values $\overline{p/\sqrt{a}}$ and $\overline{a/p^2}$ of the quotients $p/\sqrt{a}$ and a/p^2 extended over all cells. If these mean-values exist, then

$$\text{(a)} \qquad \overline{p/\sqrt{a}} \geqq 2\sqrt[4]{12}$$

and

$$\text{(p)} \qquad \overline{a/p^2} \leqq 1/8\sqrt{3}.$$

If for each cell $a=1$ or $p=1$, then $\bar{p} \geqq 2\sqrt[4]{12}$ and $\bar{a} \leqq 1/8\sqrt{3}$, respectively, in accordance with the results mentioned above.

The inequalities (a) and (p) are valid also for a decomposition of any convex hexagon into convex pieces. Since the quadratic mean is larger than the arithmetic mean (a) gives a lower bound for the average isoperimetric quotient of the partial domains:

$$\overline{p^2/a} \geqq 8\sqrt{3}.$$

This weaker inequality may be generalized in another direction [8]: it holds with strict inequality for the decomposition of any convex domain into at least two convex partial domains. To refer to related fields, we mention an immediate consequence of this result according to which a convex domain can never be packed as densely by equal circles as the whole plane.

We have considered the total length of certain spherical nets. An interesting ramification of this problem concerns the total edge-length of a polyhedron containing a given sphere. The discussion of the various results obtained in this direction and the problems to be solved would lead too far afield. Omitting this we turn our attention to solid tessellations.

Besides the volume V and the surface-area S, a convex polyhedron has a third fundamental gauge, the *edge-curvature* M defined by

$$M \doteq \tfrac{1}{2} \sum \alpha l,$$

where l is the length of an edge, α the outer dihedral angle at this edge, and the summation extends over all edges. Therefore the isoperimetric problems which may be raised for tessellations are much more varied in space than in the plane. In the problems concerning solid tessellations there is also a fundamental difference between convex and general cells. This difference concerns not only the difficulty of the solutions but the solutions themselves. We start by considering convex cells.

In the "immediate" analogues of the two-dimensional problems, involving V and S only, the part of the regular hexagon seems to be taken over by the Archimedean truncated octahedron. But this is not always so. The following inequality [8] settles a problem the solution of which is dominated by the architecture of the bees.

Consider a decomposition of the Euclidean space into convex cells. Let V, S and M be the volume, surface-area and edge-curvature of a cell and suppose that the mean-values $\overline{S^2/V}$ and $\overline{M}$ exist. Then

$$\pi\overline{S^2/V} \geqq 6\sqrt{3}\,\overline{M}.$$

We emphasize the special case of congruent cells: The three fundamental gauges of a convex space-filler satisfy the inequality

$$\pi S^2 \geqq 6\sqrt{3}\, MV.$$

Equality holds for exactly two bodies, namely for the rhombic dodecahedron and the trapezo-rhombic dodecahedron (which arises from the rhombic dodecahedron by cutting it by a plane perpendicular to an edge into two equal parts and replacing one part by the image of the other part reflected in this plane). These two solids may be defined as polyhedra circumscribed about a sphere all dihedral angles of which are 120°.

We recall the classical problem of finding the complete system of inequalities which hold between the fundamental gauges of a convex body. This exciting but extremely difficult problem, brought into prominence by Blaschke, is not solved completely as yet. The above inequality suggests the more hopeful problem for the Fedorovean (or perhaps for all) space-fillers.

Now we consider the problem of decomposing the space into not necessarily convex cells of unit volume having the least average surface-area. It can be shown that in a best decomposition along each edge three faces must meet under equal angles. To give this statement a more detailed formulation, note that from a topological point of view the cells are polyhedra with generally curved faces and edges. Thus along the edges the dihedral angle may vary from point to point. But in the extremal case the dihedral angles have the constant value of 120°.

Though the dihedral angles of the rhombic dodecahedron are equal to 120°, we know that the decomposition into truncated octahedra is better. On the other hand, the dihedral angles of the truncated octahedron are not equal to 120°. Therefore this decomposition is not the best one either. In fact, Lord Kelvin showed that the truncated octahedron can be deformed into a nonconvex space-filler of the same volume but smaller surface-area. Has Lord Kelvin's solid the least surface-area among the space-fillers of equal volume? Or is the solid tessellation generated by it even the solution of the general problem involving incongruent cells? Our present mathematical knowledge is inadequate to answer these questions.

To conclude, we mention a highly interesting result due to Heppes which may be interpreted as follows. If in a lather there is a bubble surrounded entirely by other ones then the lather contains a nonconvex bubble. The exact statement reads as follows. Let U be the union of n convex bodies of volume $V_1, \cdots, V_n$. If there is a body lying completely in the interior of U, then U can be decomposed into n partial bodies of volume $V_1, \cdots, V_n$ having a smaller total surface-area than the original bodies. (To make the above interpretation clear we must add that such new bodies may be obtained by arbitrarily small variations of the original ones.)

The ingenious proof rests on the enumeration of all spherical tessellations with convex faces each angle of which is equal to $2\pi/3$. It turned out that besides the four regular tessellations of this type there are five irregular ones. Since the further possibilities when all angles are $2\pi/4$, $2\pi/5$, $\cdots$ yield only regular tessellations, Heppes obtained, as an additional result, the enumeration of all isogonal spherical tessellations with convex faces.

Of course, the theorem of Heppes does not hold in spherical or hyperbolic spaces. Consider, for instance, the famous decomposition of the spherical space into 120 regular dodecahedra. There is no doubt that of all decompositions into 120 parts of equal volume the regular decomposition has the least total surface-area of the parts. Unfortunately, the proof of this conjecture involves considerable difficulties.

Bibliography

1. W. D'Arcy Thompson, *On growth and form*. I, II, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

2. M. N. Bleicher and L. Fejes Tóth, *Two-dimensional honeycombs*, Amer. Math. Monthly (to appear).

3. L. Fejes Tóth, *Über das kürzeste Kurvennetz, das eine Kugeloberfläche in flächengleiche konvexe Teile zerlegt*, Mat. Term.-tud. Értesitö **62** (1943), 349–354.

4. ———, *Isoperimetric problems concerning tessellations*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **14** (1963), 343–351.

5. ———, *On shortest nets with meshes of equal area*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **11** (1960), 363–370.

6. ———, *An arrangement of two-dimensional cells*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **2** (1959), 61–64.

7. ———, *Filling of a domain by isoperimetric discs*, Publ. Math. Debrecen **5** (1957), 119–127.

8. ———, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Springer, Berlin, 1953.

9. L. Fejes Tóth and A. Heppes, *Filling of a domain by equiareal discs*, Publ. Math. Debrecen **7** (1960), 198–203.

10. A. Heppes, *Filling of a domain by discs*, Publ. Math. Decebren (to appear).

UNIVERSITY OF WISCONSIN

SCHEDA N. 13 (Problemi tratti da: G. Lucchini: *L'ottimizzazione nella scuola dell'obbligo* - III, Didattica delle scienze, n. 56, pp. 13-18.)

61 Uno yacht è ancorato in un punto A, a 50 *m* da un muro frangiflutti CD: il capitano dello yacht vuole raggiungere, a remi, prima il muro, per imbarcare un passeggero e poi un motoscafo ancorato in B a 80 *m* dal muro. Facendo un disegno in scala (fig. 15), trovare qual è il percorso più breve che egli può compiere, sapendo che la lunghezza di CD è 130 *m* (43).

Fra le possibili soluzioni del problema si ricerca in questo caso la soluzione ottima: tale soluzione può essere ricercata per tentativi oppure applicando le proprietà di una semplice trasformazione del piano. Applico la simmetria che porta A in A' rispetto a CD, la linea retta rappresenta il percorso più breve fra A' e B. Sia H il punto in cui A'B incontra CD.
Il percorso più breve è quindi A-H-B.
Con facili considerazioni si troverà poi che il punto H dista 50 *m* dal punto C (44).

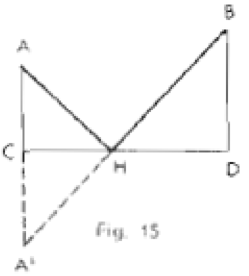


Fig. 15

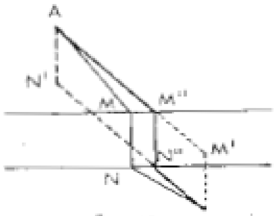


Fig. 16

Due città, A e B, sono separate da un canale con le sponde parallele: esse vogliono collegarsi con una strada che passi perpendicolarmente il canale e tale che il percorso, tra le due città sia minimo (fig. 16).

Il problema, facilmente risolubile con una traslazione (infatti tracciando un percorso qualsiasi AMNB notiamo che il tratto MN ha lunghezza e direzione costante, trasliamo allora il segmento MN finché M coincida con A o N coincida con B: NMAN' è un parallelogramma quindi il segmento AM è congruo al segmento N'N: si tratta allora di rendere minimo il tratto N'NB. La linea retta rappresenta il percorso più breve fra N' e B, quindi in totale il percorso più breve fra le due città è dato da AM''N''B; discorso analogo vale per BM'MN), ci è parso interessante per introdurre in una seconda media il concetto di trasformazione del piano e più in particolare di traslazione (45).

I ragazzi hanno affrontato il problema per tentativi (es. "lo troverei il punto di mezzo fra A e B e li farei il ponte") ma, via via sono uscite delle osservazioni che, puntualizzate con l'aiuto dell'insegnante, hanno condotto alla scoperta della proprietà fondamentale della traslazione (es. "È proprio necessario fare il ponte dritto? Se non è necessario congiungo A e B con una linea retta, così sono sicuro che è il tratto più breve; però ora il ponte misura di più, prima misurava sempre 1 *cm*").

L'idea suggerita dall'insegnante di poter trasportare una estremità del ponte in una delle due città ha provocato non poche perplessità e discussioni ed ha aiutato a capire, ancora una volta, come per i ragazzi sia difficile staccarsi dalla realtà delle situazioni per giungere alla astrazione matematica.

Un arabo vuole tornare alla sua tenda (questa è ubicata come in fig. 17) e sulla via del ritorno vuole pascolare il suo cavallo e attingere acqua a un fiume.
Quale è la prima cosa da fare per compiere il tragitto più breve? (46).

Indichiamo la tenda con un punto A, il simmetrico di A rispetto alla sponda del fiume sia a_1, il simmetrico di a_1 rispetto al bordo del pascolo sia a_2. Il segmento che congiunge l'arabo con a_2 ha la misura del percorso più breve andando prima al pascolo.
Indichiamo ora con A_1 il simmetrico di A rispetto al bordo del pascolo e con A_2 il simmetrico di A_1 rispetto alla sponda del fiume. Il segmento che congiunge l'arabo con A_2 ha la misura del percorso più breve andando prima al fiume.
Il confronto delle due misure sulla figura è immediato, e così pure la conseguente determinazione del percorso cercato, che nella figura è rappresentato dalla spezzata in neretto.
Si può osservare che c'è una semiretta di punti equidistanti da a_2 e da A_2 (la congiungente la tenda con il punto di intersezione tra sponda del fiume e bordo del pascolo, che sono chiaramente punti equidistanti dai due punti detti) che sono *neutri*, nel senso che da essi è indifferente andare prima al pascolo o prima al fiume. Questa semiretta divide la regione delimitata da fiume e pascolo in due parti tali che per i punti di ciascuna di esse la soluzione ottimale porta, indipendentemente dal punto, ad andare prima al fiume o prima al pascolo.
Questo fatto dà un criterio di scelta sull'ordine delle operazioni (pascolo, fiume) che può essere tradotto anche nella considerazione della posizione dell'arabo rispetto alla tenda e al punto di intersezione tra sponda del fiume e bordo del pascolo: l'arabo vede l'intersezione alla sinistra della tenda se è a sinistra della detta semiretta di punti neutri e quindi è più vicino a a_2 che a A_2.

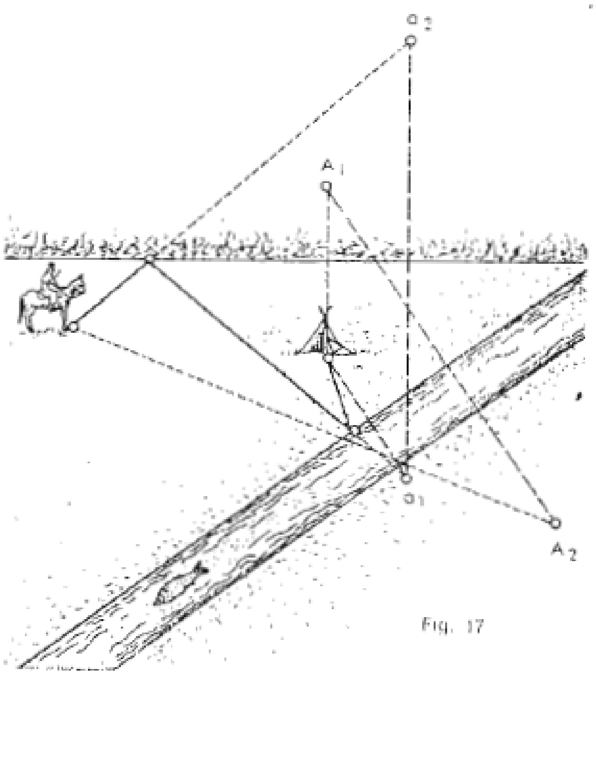


Fig. 17

6.2. Un noto problema di ricerca di minimo è quello della mosca e del ragno, che presentiamo in forma semplificata rispetto alla formulazione abituale ([47]) e trattiamo in condizioni particolari ([48]) anche con l'impiego di coordinate cartesiane ortogonali.
Nelle condizioni che vogliamo considerare, il problema può essere enunciato nel modo seguente:
« In una stanza a forma di cubo, lo spigolo del quale assumiamo come unità di misura, una mosca sta posata sulla verticale nel mezzo di una parete laterale, a distanza $a < 1/2$ dal soffitto; sulla parete di fronte, sulla verticale nel mezzo a distanza $b < 1/2$ dal soffitto, sta posato un ragno che vuole raggiungere la mosca: quale è la via più breve che deve seguire, supponendo che la mosca, immobilizzata dal terrore, non si muova? » (fig. 18).

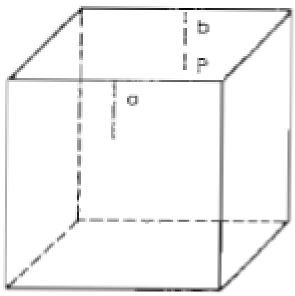


Fig. 18

Come si è già visto (n. 6.1.), il problema del minimo percorso nel piano viene risolto nel modo più semplice osservando che — in assenza di ostacoli — la linea più breve che congiunge due punti è il segmento che ha i punti stessi come estremi: possiamo utilizzare questa osservazione sviluppando il cubo sul piano e considerando la linea ottenuta congiungendo i punti che rappresentano le posizioni del ragno e della mosca; occorre, tener presente che il cubo ha diversi sviluppi, dei quali però sono significativi per il problema in esame ([49]) solo i quattro che possono essere considerati sulla figura 19, indicando con P la posizione del ragno e con Q, R, S, T le rispettive posizioni della mosca nei quattro sviluppi. I quattro percorsi possibili si confrontano senza difficoltà.
Si può anche introdurre un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ad esempio nel modo indicato in figura: determinate le coordinate dei cinque punti, è immediato, almeno nel caso in esame, riconoscere il percorso minimo.

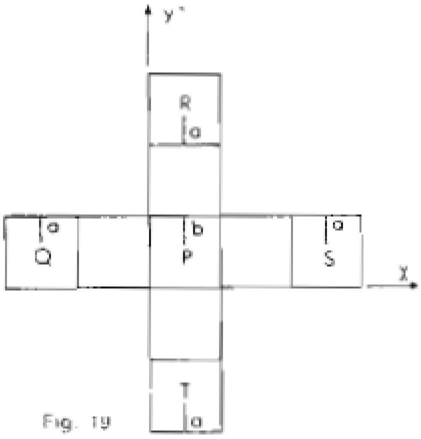


Fig. 19

6.7. Un giocatore nasconde una moneta sul retro di una scacchiera in corrispondenza di una casella: l'altro giocatore deve individuare la casella ponendo domande alle quali può essere risposto solo "sì" o "no"; esiste una strategia ottimale per formulare le domande? ([56]).
Le domande possono essere fatte, chiaramente, secondo due criteri sostanzialmente diversi: la ricerca di una strada *sicura* che conduca alla determinazione voluta con un certo numero di domande senza la possibilità di ottenerla con un numero minore e la ricerca di una strada *avventurosa* nella quale si cerchi di ottenere la determinazione voluta con il più basso numero di domande possibile senza certezza di successo.
Una strategia *sicura* è ad esempio quella di individuare la riga e la colonna con domande che portino a dimezzare ogni volta le possibilità: in ogni strategia di questo tipo occorrono sei domande ([57]). Una strategia *avventurosa* è ad esempio quella di chiedere se la moneta si trova in corrispondenza di una certa casella: con questa strategia la moneta può essere individuata con una sola domanda, ma è anche possibile che occorrano 63 domande (ciò che accade per le due caselle che rimangono dopo 62 domande con risposta negativa); supposto che tutte le caselle abbiano eguale probabilità, si può dire che il numero medio di domande da formulare con questa strategia è

$$\frac{1+2+3+\ldots+62+63+63}{64} = \frac{63}{2} + \frac{63}{64} =$$
$$= 32{,}484375.$$

6.9. « Consideriamo un semplice gioco con le monete. Ciascun giocatore, A e B, pone sul tavolo una moneta (con testa o croce in alto) e la copre con la mano in modo che l'altro non possa vederla. Se entrambe le monete presentano in alto la stessa faccia (entrambe testa o entrambe croce) A vince e le prende entrambe; in caso contrario (una testa e una croce) vince B e a questi spettano le due monete. (...) Noi abbiamo due strategie possibili. A_1: mostrare testa; A_2: mostrare croce. Analogamente, anche il nostro avversario ha solo due strategie: B_1: mostrare testa; B_2: mostrare croce. Si tratta quindi di un gioco 2 · 2. Se vinciamo, la nostra vincita è + 1, se perdiamo — 1. Riportiamo la matrice delle vincite (fig. 24).

B / A	B_1 (T)	B_2 (C)
A_1 (T)	1	-1
A_2 (C)	-1	1

Fig. 24

6.4. Partendo dal cerchietto in alto della figura 21 e scendendo lungo i collegamenti segnati tra i cerchietti, si vuole raggiungere un cerchietto della fila in basso in modo che la somma dei numeri scritti sui quattro cerchietti toccati sia la massima possibile.
Oltre che elencando tutti i percorsi possibili, si può procedere rifacendosi al principio di ottimalità del Bellmann ([52]) nel modo indicato nelle due parti della figura 22, ottenute considerando rispettivamente il passaggio più conveniente dalla terza alla quarta fila e dalla seconda fila a quella ottenuta con l'operazione precedente: il percorso cercato è quello indicato nella figura 23. Lasciamo al Lettore la determinazione del risparmio di operazioni conseguito con questo procedimento.

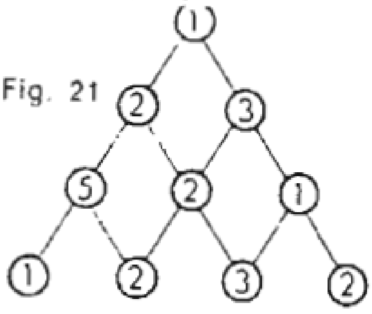


Fig. 21

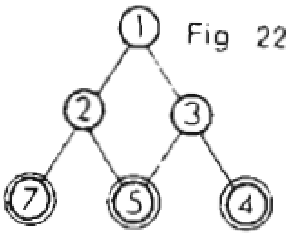


Fig 22 a)

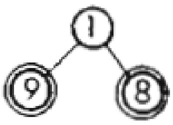


Fig. 22 b)

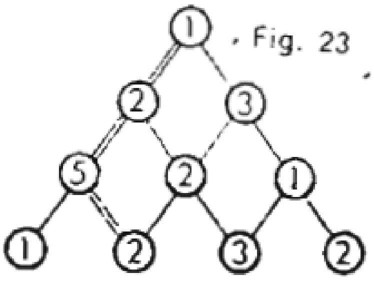


Fig. 23

6.5. Sul n. 2187 della *Settimana enigmistica* sono stati pubblicati il seguente problema (n. 8421) e la relativa soluzione.

« Un tale vuole costruirsi una piscina a forma di parallelepipedo che abbia un volume di 500 metri cubi, ma, essendo un po' avaro, desidera spendere il meno possibile per il rivestimento delle pareti laterali e del fondo. Egli ricorda che, a parità di volume, fra tutti i parallelepipedi, quello che ha la minima superficie esterna è il cubo, per cui decide di costruire la piscina basandosi su tale principio. Quali saranno le sue misure? ».

La piscina sarà lunga e larga 10 *m* e alta 5. Infatti, se il volume voluto fosse di 1000 *mc* e anziché di una piscina si trattasse di un cubo (ossia ... con il coperchio), il suo lato sarebbe di 10 *m*. Se si taglia a metà tale cubo si ottengono due mezzi cubi (senza coperchio), ciascuno della capacità di 500 *mc*, che ovviamente hanno anch'essi la minima superficie. Perciò la piscina è lunga e larga 10 *m* e profonda 5 (53).

Questa soluzione ci è apparsa brillante e vogliamo farlo rilevare proponendo alcuni problemi, fra i quali quello in questione, e applicando per la loro risoluzione un teorema fondamentale per la ricerca elementare dei massimi e minimi: la somma di più numeri reali positivi, di dato prodotto, è minima quando tutti i numeri sono uguali fra loro (54).

I) Tra tutti i parallelepipedi del volume di 1000 *mc* determinare quello di superficie minima.

Dette x, y, z le dimensioni del parallelepipedo si ha:

$$\begin{cases} xyz = 1000 \text{ (a)} \\ 2xy + 2xz + 2yz = S \text{ (superficie da rendere minima).} \end{cases}$$

Poiché il prodotto degli addendi che dànno S è noto:
$2xy \cdot 2xz \cdot 2yz = 8 \cdot xyz \cdot xyz = = 8.000.000$,
allora S è minima se è
$2xy = 2xz = 2yz$,
cioè
$x = y = z$.
Tenendo conto della (a) si ha:
$x = y = z = 10$.

II) Il problema di partenza.
Dette x, y, z le dimensioni della piscina si ha:

$$\begin{cases} xyz = 500 \text{ (b)} \\ xy + 2xz + 2yz = S \text{ (superficie da rendere minima).} \end{cases}$$

Poiché il prodotto degli addendi che dànno S è noto:
$xy \cdot 2xz \cdot 2yz = 4 \cdot xyz \cdot xyz = 1.000.000$,
allora S è minima se è
$xy = 2xz = 2yz$,
cioè
$x = y = 2z$.
Tenendo conto della (b) si ha:
$x = y = 10 \qquad z = 5$.

III) La piscina abbia un volume di 250 *mc* e sia da costruire accostandola ad una parete già piastrellata e di dimensioni indefinite.
Le pareti da costruire e piastrellare sono quindi 4.
Allora dette x, y, z le dimensioni della piscina si ha:

$$\begin{cases} xyz = 250 \, (c) \\ xy + xz + 2yz = S \text{ (superficie da rendere minima)} \end{cases}$$

Poiché il prodotto degli addendi che dànno S è noto:
$xy \cdot xz \cdot 2yz = 2 \cdot xyz \cdot xyz = 125.000$,
allora S è minima se è
$xy = xz = 2yz$,
cioè
$x = 2y = 2z$.
Tenendo conto della (c) si ha:
$x = 10 \qquad y = z = 5$.

IV) La piscina abbia un volume di 125 *mc* e si supponga di avere già a disposizione due pareti, formanti un diedro retto, di dimensioni indefinite e già piastrellate.
Questa volta le pareti da costruire e da piastrellare sono 3. Dette x, y, z le dimensioni della piscina si ha:

$$\begin{cases} xyz = 125 \text{ (d)} \\ xy + xz + yz = S \text{ (superficie da rendere minima).} \end{cases}$$

Poiché il prodotto degli addendi che dànno S è noto:
$xy \cdot xz \cdot yz = xyz \cdot xyz = 125 \cdot 125 = 15.625$,
allora S è minima se è
$xy = xz = yz$,
cioè
$x = y = z$.
Tenendo conto della (d) si ha:
$x = y = z = 5$.

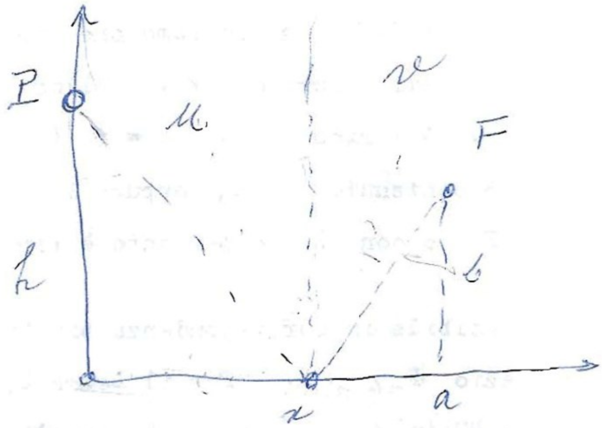
V) Non poniamo il caso in cui ci sono da costruire 2 facce in quanto il problema richiederebbe ulteriori condizioni.
Ecco ora l'osservazione che ci permette di giudicare interessante la soluzione proposta dal settimanale per il problema di partenza: in ognuno dei 4 problemi proposti le pareti da costruire formano una figura tale che l'accostamento rispettivamente di 1, 2, 4, 8 figure uguali tra loro dànno un cubo.
Questa osservazione ci permette di dare una ulteriore dimostrazione della validità dei risultati trovati.
Per semplicità riferiamoci al problema di partenza: per assurdo la soluzione cercata sia una piscina di superficie S e tale che non sia $x = y = 2z$. Allora dall'accostamento di due figure siffatte si otterrà un parallelepipedo di superficie 2S. Ora poiché questo parallelepipedo non è certamente un cubo, sarà possibile trovare un cubo di ugual volume ma di superficie 2S' minore di 2S. Tagliando il cubo con un piano mediano si otterrà la piscina del volume voluto ma di superficie S' minore di S.

Scheda N. 14. Rifrazione della luce.

La **legge di Snell** descrive quanto i raggi sono deviati quando passano da un mezzo ad un altro. Se il raggio proviene da una regione con indice di rifrazione n_1 ed entra in un mezzo ad indice n_2 , gli angoli di incidenza ϑ_1e di rifrazione ϑ_2 sono legati dall'espressione:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

dove v_1e v_2 sono le velocità nei mezzi.



$m, n > 0$ $\qquad a, b > 0$

$0 < x < a$

$\begin{cases} m = 1/u \\ n = 1/v \end{cases}$

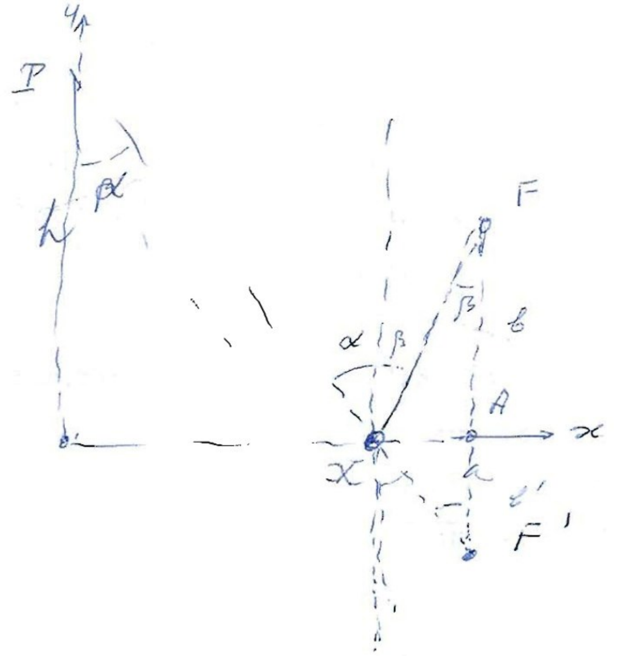
u, v velocit

$$f(x) = m\sqrt{h^2+x^2} + n\sqrt{b^2+(a-x)^2}$$

$$f' = \frac{2mx}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{2n(a-x)}{\sqrt{\ }} = 0$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\dfrac{a-x}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}} = \frac{v}{u} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$\boxed{m \sin\alpha = n \sin\beta}$ $\qquad \boxed{v \sin\alpha = u \sin\beta}$



$$\sin\beta = \frac{XA}{XF}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta' = \frac{XA}{XF'}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{XF'}{XF} \qquad \frac{XF'}{u} = \frac{XF}{v}$$

$$v\cdot\sin\beta = u\sin\alpha \qquad XF\sin\beta = XF'\sin\alpha$$

$$m\,n\,\underbrace{XF\sin\beta} = \underbrace{m\,n\,XF'\sin\alpha}$$

$$m\,XF = n\,XF'$$

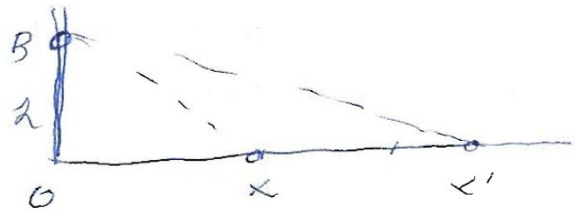
$$\frac{1}{u}XF = \frac{1}{v}XF'$$

$$XF\cdot v = XF'u$$

$$\frac{XA}{\sin\beta}v = \frac{XA}{\sin\alpha}u$$

$b' \, tg\, \alpha = b \; tg\, \beta$

$$\frac{b'}{b} = \frac{t_\beta}{g\,\alpha} = \frac{\dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}}{\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}}$$



$\cancel{Bx'} = k \;\; Bx$

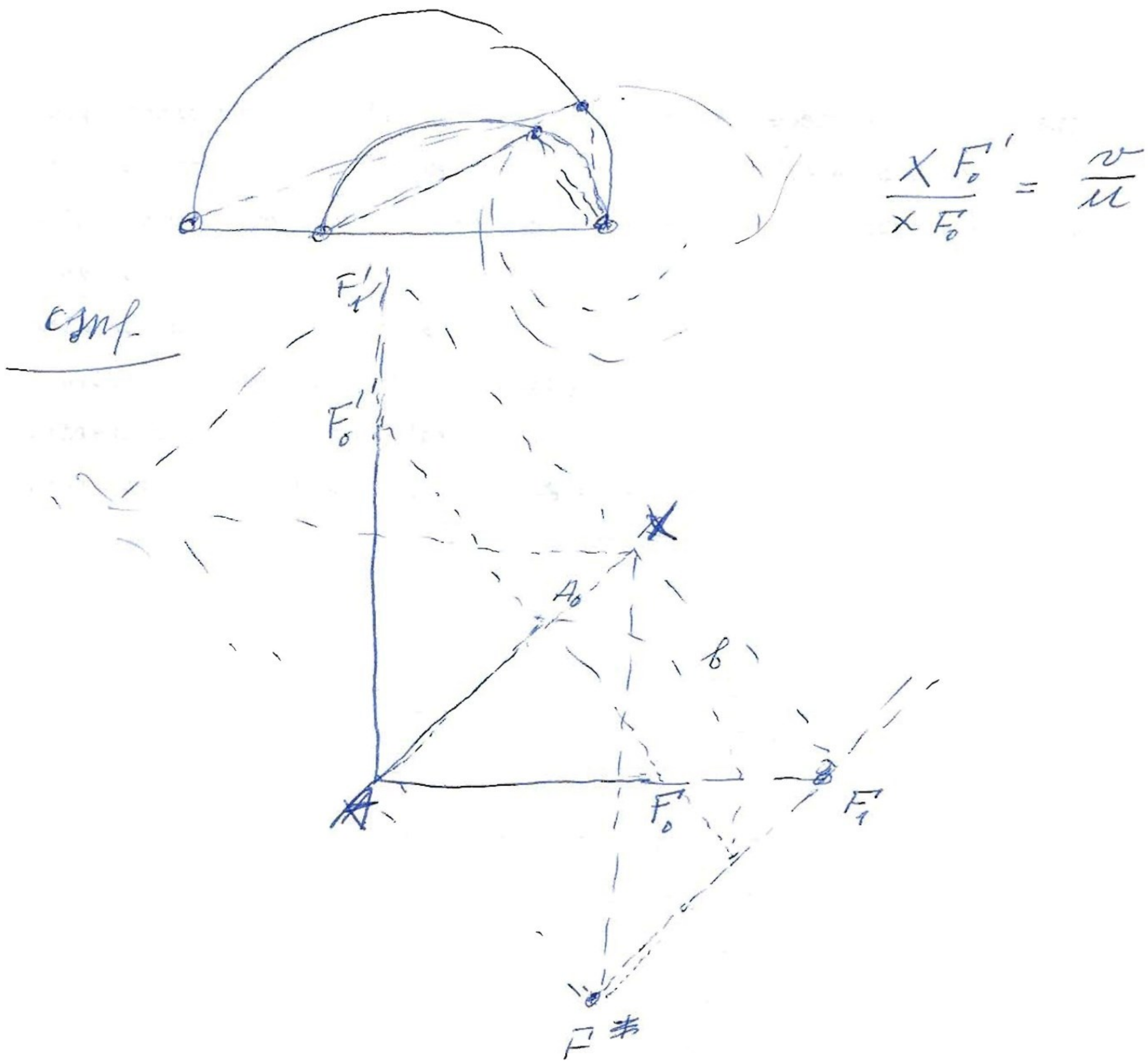
$\left(\sqrt{h^2+x'^2} = k\sqrt{h^2+x^2}\right.$

$\left(h^2 + x'^2 = k^2(h^2+\cancel{\;}x^2)\right.$

$h^2(1-k^2) = x'^2 - k^2x^2$

$h(1+k) \times h(1-k) = (x'+kx)(x'-kx)$

$x'+k$



…..Come quando da l'acqua o da lo specchio
salta lo raggio a l'opposita parte,
salendo sù per lo modo parecchio

a quel che scende, e tanto si diparte
dal cader de la pietra in igual tratta,
sì come mostra esperïenza e arte;

così mi parve da luce rifratta
quivi dinanzi a me esser percosso;……….

Purg. xv,16-23

Scheda N. 15. Da *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* raccolte e coordinate da FEDERIGO ENRIQUES - III Edizione - Parte III (pp. 201-310) - Zanichelli Bologna, 1927.
- *XXVI* - *Sulla teoria elementare degli isoperimetri* di OSCAR CHISINI (Milano). Introduzione

ARTICOLO VENTISEIESIMO

Sulla teoria elementare degli isoperimetri di OSCAR CHISINI a Milano.

La teoria antica degli isoperimetri quale si trova nel V libro di PAPPO è dovuta a ZENODORO (1): essa contiene già le proposizioni principali, cioè che il triangolo isoscele ha area maggiore di ogni triangolo di ugual base e perimetro, che il poligono regolare ha la superficie massima fra tutti i poligoni isoperimetrici collo stesso numero di lati, che l'$n+1$-gono regolare racchiude area maggiore dell'n-gono regolare di ugual perimetro, e che infine il cerchio è maggiore di ogni poligono che sia racchiuso da egual contorno.

La teoria resta poi invariata finchè, col sorgere del calcolo differenziale e con la diffusione delle ricerche di massimo e di minimo, nasce il problema del poligono articolato, cioè il problema di trovare quale sia il poligono di area massima fra tutti quelli con dati lati. La risoluzione di questo problema è dovuta a CRAMER (2); il quale dimostra, prima elementarmente e poi col sussidio del calcolo differenziale, che fra tutti i quadrangoli con dati lati ha area massima quello inscrittibile in un cerchio, e da questa proposizione deduce che il poligono iscritto ha area maggiore di ogni altro che ne abbia i medesimi lati.

Questo rimane il contenuto fondamentale della teoria classica sul massimo delle figure piane isoperimetriche, quale la troviamo codificata per esempio nel trattato di

(1) Cfr. *Zeitschrift für Math. und Phys.* Bd. 22, nell' *Hist. und Liter. Abteilung* a pag. 173 l'art. di CANTOR.

(2) Cfr. *Histoires de l'Academie Royale de Sciences et Belles Lettres,* Berlino anno 1852, pag. 283.

TOMMASSINO (1) e nel notissimo *Abrégé de Isopérimerie* (2) di LHUILIER.

Se il sorgere del calcolo differenziale aveva richiamato l'attenzione sulle questioni di massimo e di minimo della geometria, i metodi del calcolo fecero poi abbandonare i procedimenti sintetici: questi ritornano in onore con STEINER (3), il quale riprende le proposizioni dell'isoperimetria piana, deducendo le proprietà dei poligoni iscritti e dei poligoni regolari dalla proprietà di massimo del cerchio, che dimostra direttamente: e per questa via egli può facilmente estendere i suoi teoremi alle figure sulla sfera.

È notevole in STEINER la varietà e ricchezza dei metodi: mercè cui egli può anche trattare brillantemente i problemi di massimo e di minimo relativi ai solidi, determinando quali piramidi e prismi racchiudano volume massimo sotto determinata area, e dimostrando che la sfera è il solido di volume massimo fra quelli di egual superficie. Inoltre egli intravede ed enuncia il teorema dimostrato poi da LINDELÖF (4): fra i poliedri di data specie, quello che racchiude il volume massimo sotto data superficie è circoscritto a una sfera che tocca le singole faccie nel loro baricentro.

Così si svolge e si compie la teoria degli isoperimetri, di cui — con qualche dilucidazione e complemento — ricostruiamo storicamente lo sviluppo nei primi Capitoli di questo Articolo.

Le dimostrazioni però, quali furon date da PAPPO fino a STEINER, presentano tutte una lacuna fondamentale, messa in rilievo dall'analisi moderna: si ammette che esista un n-gono di area massima fra quelli di dato perimetro, una curva d'area massima fra quelle di dato contorno, ecc. Quindi la necessità o di dimostrare questo postulato o di stabilire in modo diretto i teoremi, indipendentemente da esso.

(1) Cfr. TOMMASINI JAC. ANDREAE, *De Maximis et Minimis*, Pisis, 1774.

(2) Questo *Abrégé* è l'appendice del libro di LHUILIER intitolato *Polygonométrie* ed edito a Ginevra nel 1789. Cfr. anche dello stesso A. il *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum*, Vorsoviae, 1782.

(3) Cfr. nel « Journal de Crelle » del 1842 le due memorie di STEINER, *Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général.*

(4) Cfr. *Math. Annalen*, Bd. II, pag. 150.

Ora la dimostrazione del postulato consegue dagli sviluppi superiori dell'analisi moderna (Cfr. Art. XXVII). Ma anche restando nel campo elementare, i teoremi di ZENODORO e di CRAMER si possono dimostrare rigorosamente, seguendo CARATHEODORY e STUDY (1), ove s'interpretino le dimostrazioni classiche come procedimenti di trasformazione che conducono a serie illimitate di figure ***convergenti verso una figura limite.***

Appunto CARATHEODORY e STUDY, prendendo le mosse dalla teoria di STEINER, hanno dimostrato: il primo che il cerchio ha area massima fra tutte le curve di ugual contorno, e il secondo che il cerchio ha area maggiore di un qualunque poligono che ne abbia lo stesso perimetro; ed una semplice trasformazione dei ragionamenti usati da CARATHEODORY, ci offre la trattazione elementare dei poligoni isoperimetrici emendata dalla lacuna tradizionale.

Con ciò la teoria stessa potrebbe ritenersi esaurita; ma si affaccia naturale la domanda se gli stessi teoremi non possano rendersi indipendenti dal presupposto del massimo, confrontando direttamente il poligono regolare a uno di quelli di ugual perimetro, o il poligono iscritto nel cerchio a uno di quelli che ne abbia i medesimi lati e dimostrando in ciascun caso che il primo ha area maggiore del secondo. Ho potuto rispondere a questa domanda limitandomi all'uso di procedimenti affatto elementari ed euclidei, e presento quindi i risultati così ottenuti, come a coronamento dell'edifizio. Ciò che qui appaia di meno semplice e rapido in confronto ai metodi classici varrà almeno a mettere in maggior luce tutto il valore che appartiene alle proposizioni esistenziali nelle ricerche di massimo.

Dopo la trattazione dell'isoperimetria piana, ampiamente svolta come abbiamo detto, segue quella dell'isoperimetria solida. Qui per altro ci limitiamo ad esporre i classici sviluppi di STEINER, completati per i poliedri da LINDELÖF, ammettendo in generale il postulato del massimo. A ciò servono di complemento alcune note critiche.

In fine, quasi come appendice, aggiungiamo la trattazione della teoria degli isoperimetri quale può ottenersi in

(1) Cfr. *Math. Annalen*, Bd. 68, pag. 133.

un nuovo ordine di idee, collegantesi alla definizione di lunghezza e di area dovuta al MINKOWSKI: si ha qui una via rigorosa, rapida e semplice ma che — almeno apparentemente — si scosta un poco dalla classica forma dei procedimenti euclidei.

CAP. I. - La teoria degli isoperimetri in Pappo (1).

§ 1. **Lemmi sui triangoli.** — *Lemma I.* Fra tutti i triangoli di data base e dato perimentro il massimo è l'isoscele, e più generalmente fra due triangoli di ugual base e di ugual perimetro è maggiore quello che più si accosta al triangolo isoscele, cioè in cui è minore la differenza fra gli